☙ Correction du devoir maison 8 ❧
Continuité et TVI.

Tout élève en fera pour au moins deux ♠♠ .

Exercice 1. ♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x \leq 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

   Sur l'intervalle $]-\infty;2[$, f est une fonction polynôme donc f y est continue.
   Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ f est une fonction affine donc f y est continue.
   Au final f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, subsiste un doute sur la continuité de f en 2.

2. Déterminer a pour que f soit continue en 2.

   f est continue en 2 si et seulement si :

   $$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

   Or, $f(2) = 4 - a$. Pour calculer la limite en 2 on doit distinguer deux cas :

   – Si $x > 2$ alors $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 5 - x = 1$.

   – Si $x \leq 2$ alors $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - a = 4 - a$.

   $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe si et seulement si

   $$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) \Longleftrightarrow 1 = 4 - a \Longleftrightarrow a = 3$$

   Dans ce cas on a bien $f(2) = 4 - 3 = 1$ tout comme la limite de f en 2.
   Conclusion : f est continue en 2 si et seulement si $a = 3$.

Exercice 2. **Partie A : Une fonction auxiliaire** ♠

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -14x^3 + 21x^2 + 8$$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$

   En $-\infty$ on a une forme indéterminée, pour montrer que le terme au cube va « gagner »on factorise par x^3 et pour $x \neq 0$ on a :

   $$g(x) = x^3\left(-14 + \frac{21}{x} + \frac{8}{x^3}\right)$$

   Au final $\lim\limits_{x\to\pm\infty} -14 + \dfrac{21}{x} + \dfrac{8}{x^3} = -14$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
   Par produit on obtient :

   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

   De même comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ on a par produit :

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

2. Etudier les variations de la fonction g.

   On dérive g et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$g'(x) = -42x^2 + 42x = x(-42x + 42)$$

   Ce polynôme admet deux racines évidentes 0 et 1, inutile donc de caculer le discriminant et on obtient :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	15	$\searrow$	$-\infty$

Remarquons que $g(0) = 8$ et $g(1) = 15$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 0.01 près.
   D'après le tableau de variation précédent, pour tout $x \in]-\infty; 1]$ on a :

$$g(x) \geq 8 \Longrightarrow g(x) > 0$$

   Autrement dit l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.
   Sur l'intervalle $[1; +\infty[$:
   - g est une fonction polynôme donc continue.
   - $g(1) = 15$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
   - g est strictement décroissante.

   D'après le corollaire du TVI l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; +\infty[$.
   Enfin puisque $g(1,6) > 0$ et $g(1,8) < 0$ on a $\alpha \simeq 1,7$.

4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
   Sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ on a vu que $g(x) > 0$.
   Sur l'intervalle $[1; \alpha]$ g est strictement décroissante et $g(\alpha) = 0$, donc pour tout $x \in]-\infty; \alpha]$ on a $g(x) \leq 0$.
   Enfin puisque g est décroissante sur $[1; +\infty[$ et $g(\alpha) = 0$ on a pour $x > \alpha$ $g(x) < 0$ ce qui donne :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B : Etude d'une fonction ♠♠

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 1)(7 - 2x)^4$$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 7 - 2x = +\infty$, or $\lim\limits_{X\to+\infty} X^4 = +\infty$, par conséquent :

$$\lim_{x\to-\infty} (7-2x)^4 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 - 1 = -\infty$$

   Par produit il vient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 7 - 2x = -\infty$, or $\lim\limits_{X\to-\infty} X^4 = +\infty$, par conséquent :

$$\lim_{x\to+\infty} (7-2x)^4 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^3 - 1 = +\infty$$

   Par produit il vient :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. Montrer que $f'(x) = (7 - 2x)^3 \times g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Voici une question bien désagréable quand on ne connaît pas la dérivée de u^n. Il faut donc modifier l'expression

de $f(x)$.

$$f(x) = (x^3-1)(7-2x)^2(7-2x)^2 = (x^3-1)(49-28x+4x^2)(49-28x+4x^2)$$

Ainsi

$$f(x) = (x^3-1)(49^2-1372x+196x^2-1372x+784x^2-112x^3+196x^2-112x^3+16x^4)$$

Et enfin :

$$f(x) = (x^3-1)(16x^4-224x^3+1176x^2-2744x+49^2)$$

Cette fonction est de la forme uv avec $u(x) = x^3-1$ et $u'(x) = 3x^2$ puis avec $v(x) = 16x^4-224x^3+1176x^2-2744x+49^2$ et $v'(x) = 64x^3-672x^2+2352x-2744$.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f' = u'v+uv' \iff f'(x) = 3x^2(16x^4-224x^3+1176x^2-2744x+49^2)+(x^3-1)(64x^3-672x^2+2352x-2744)$$

Fatigué de ces calculs peu enrichissant vérifions sur une calculatrice en lui demander de dévolopper l'expression que l'on doit trouver et celle que l'on a trouvé :

$$(x^3-1)g(x) = 112x^6-1344x^5+5880x^4-11040x^3+7875x^2-2352x+2744$$

Et on a trouvé (toujours avec une calculatrice) :

$$f'(x) = 112x^6-1344x^5+5880x^4-11040x^3+7875x^2-2352x+2744$$

C'est bon donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = (x^3-1)g(x)$$

3. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f ?
Ce tableau de signe résume et la recherche de signe de f' et les variations de f.

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
x^3-1		$-$	0		$+$		
$g(x)$			$+$		0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

4. Combien l'équation $f(x) = 12$ possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?
On ne demande pas de les déterminer.
Tout d'abord $f(\alpha) \simeq 650$. Une observation rapide du tableau de variation permet de déduire que cette équation admet exactement 3 solutions.

- f est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il sagit d'une fonction polynôme.
- f est strictement monotone sur chacun des intervalles $I_1]-\infty;1]$, $I_2 = [1;\alpha]$ et $I_3 = [\alpha;+\infty[$.
- Enfin $12 > 0$ (pour le premier intervalle), 12 est entre 0 et $f(\alpha)$ pour le second et $12 < f(\alpha)$ pour le troisième.

On en déduit d'après le corollaire du TVI que l'équation $f(x) = 12$ admet exactement une solution sur chacun des trois intervalle I_1, I_2 et I_3. Par conséquent $f(x) = 12$ admet exactement trois solutions.

Exercice 3. ♠♠♠♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(2-x) & \text{si} \quad x \in [0;2[\\ f(2+x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. (a) Sur $[0;2[$ la fonction f est une fonction polynôme, elle est donc continue. De plus pour $x = 2$ on a :

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = f(0) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = f(2) = 0$$

Par conséquent on a :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 0$$

ce qui prouve que la fonction f est continue en 2.
Au final f est continue sur $[0;2]$

(b) Pour tout $x \in [0;2]$ on a $f'(x) = 2x(2-x) - x^2 = x(4-2x-x) = x(4-3x)$

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 4-3x = 0 \iff x = \frac{4}{3}$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{4}{3}$		2
fâ£Ů(x)	0	+	0	−	
f	0	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0

cf ci-dessous pour la courbe.

(c) On peut en déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[2n;2n+2]$ où $n \in \mathbb{Z}$ par translation de vecteur $2n\vec{i}$ de la représentation graphique de f sur $[0;2]$

2. Si $x \in [2n;2n+2]$ alors $x - 2n \in [0;2]$ et :

$$f(x-2n) = (x-2n)^2(2-x+2n) = (x-2n)^2(2n+2-x)$$

Montrons que $f(x) = f(x-2n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Par récurrence notons $\mathscr{P}(n)$: $f(x) = f(x-2n)$

– pour $n = 0$ la propriété $\mathscr{P}$ est trivialement vraie.
– Supposons que $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons que $\mathscr{P}$ est vraie au rang $n+1$
On a donc $f(x-2n) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, or on a $f(x+2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc on a $f(x-2) = f(x)$ en appliquant la formule précédente pour $x-2$ donc :

$$f(x-2n-2) = f(x-2n) = f(x) \iff f(x-2(n+1)) = f(x)$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$, ainsi pour tout $x \in [2n;2n+2]$ avec $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(x) = (x-2n)^2(2-x+2n)$$

Si $n \leq 0$ alors posons $m = -n \in \mathbb{N}$ et montrons, par récurrence la propriété $\mathscr{P}'(n)$:

$$f(x+2m) = f(x)$$

- pour $m = 0$ la propriété $\mathscr{P}'$ est trivialement vraie.
- Supposons que $\mathscr{P}'$ soit vraie au rang m et montrons que $\mathscr{P}'$ est vraie au rang $m+1$

$$f(x+2m+2) = f(x+2m) = f(x)$$

  La propriété $\mathscr{P}'$ est donc vraie au rang $m+1$
  Par conséquent on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \leq 0$:

$$f(x-2n) = f(x+2m) = f(x)$$

Pour résumé si $x \in [2n; 2n+2]$, alors

$$f(x) = (x-2n)^2(2n+2-x)$$

3. En raisonnant comme en 1.a, puisque f est une fonction polynôme f est continue sur tout intervalle de la forme $[2n; 2n+2[$, de plus pour $x = 2n$

$$\lim_{\substack{x \to 2n \\ x > 2n}} f(x) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 2n \\ x < 2n}} f(x) = 0$$

Par conséquent on a :

$$\lim_{x \to 2n} f(x) = 0 = f(2n)$$

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$