∽ Correction du devoir maison 6 ∾
A la conquête de l'espace

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1. ♠

Dans un repère de l'espace, on donne des représentations paramétriques des droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1-3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad d_2 : \begin{cases} x = -4-3t \\ y = 9-2t \\ z = -5+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point $A(17;23;-12)$ appartient-il à d_1 ? appartient-il à d_2 ?

   Déterminons la valeur du paramètre t de d_1 qui donne une abscisse égale à 17 :

   $$17 = -1+3t \Longleftrightarrow 3t = 18 \Longleftrightarrow t = 6$$

   Pour $t = 6$, on obtient :

   $$y = 1-3\times 6 = -17 \qquad \text{et} \qquad z = -12$$

   L'ordonnée de A n'est pas égale à -17 donc $A \notin d_1$.

   Déterminons la valeur du paramètre t de d_2 qui donne une abscisse égale à 17 :

   $$17 = -4-3t \Longleftrightarrow 21 = -3t \Longleftrightarrow t = -7$$

   Pour $t = -7$ on obtient :

   $$y = 9+2\times 7 = 9+14 = 23 \qquad \text{et} \qquad z = -5-7 = -12$$

   Les coordonnées du point A sont obtenues en choisissant $t = -7$, par conséquent $A \in d_2$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d_3 passant par $B(1;-2;3)$ et parallèle à d_1.

   Puisque d_3 est parallèle à d_1 tout vecteur directeur de d_1 est aussi un vecteur directeur de d_3, par conséquent d_3 est dirigée par le vecteur $\vec{u}(3;-3;2)$.

   $$M(x;y;z) \in d_3 \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{BM} = t\vec{u} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1 = 3t \\ y+2 = -3t \\ z-3 = 2t \end{cases}$$

   Une représentation paramétrique de d_3 est alors :

   $$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -3t-2 \\ z = 2t+3 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

   $\overrightarrow{AB}(-16;-25;15)$ dirige (AB), par conséquent :

   $$M(x;y;z) \in (AB) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x-17 = -16t \\ y-23 = -25t \\ z+12 = 15t \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = -16t + 17 \\ y = -25t + 23 \\ z = 15t - 12 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

A votre avis, que faut-il changer dans la représentation paramétrique de la droite (AB) pour décrire le segment [AB] ?

Reprenons la démonstration précédente :

$$\mathrm{M}(x;y;z) \in (\mathrm{AB}) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Si on veut décrire le segment [AB] cela devient :

$$\mathrm{M}(x;y;z) \in [\mathrm{AB}] \Longleftrightarrow \exists t \in [0;1], \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Les points du segment [AB] sont donc obtenus pour une valeur de t comprise entre 0 et 1.

4. Déterminer la position relative de d_1 et d_2.
On précisera les coordonnées de leur point d'intersection s'il existe.
d_1 est dirigée par le vecteur $\vec{u}_1(3;-3;2)$ et d_2 est dirigée par le vecteur $\vec{u}_2(-3;-2;1)$. Pour passer de $x_{\vec{u}_1}$ à $x_{\vec{u}_2}$ on multiplie par -1 et pour passer de $z_{\vec{u}_1}$ à $z_{\vec{u}_2}$ on multiplie par $0,5$, autrement dit il n'existe pas de réel t tel que :

$$\vec{u}_2 = t\overrightarrow{u_1}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

$$\mathrm{M}(x;y;z) \in d_1 \cap d_2 \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -1 + 3t = -4 - 3t' \\ y = 1 - 3t = 9 - 2t' \\ z = 2t = -5 + t' \end{cases}$$

Nous sommes conduits à résoudre un système linéaire à trois équation et deux inconnues.
Résolvons les deux premières équations :

$$\begin{cases} -1 + 3t = -4 - 3t' \\ 1 - 3t = 9 - 2t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3t + 3t' = -3 \\ -3t + 2t' = 8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3t + 3t' = -3 \\ 5t' = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t + t' = -1 \Rightarrow t = -2 \\ t' = 1 \end{cases}$$

Enfin testons la troisième égalité avec $t = -2$ et $t' = 1$:
$2 \times (-2) = -4$ et $-5 + 1 = -4$.
La troisième égalité est satisfaite, par conséquentd_1 et d_2 sont sécantes en un point S qui a pour coordonnées :

$$\mathrm{S}(-1-6; 1+6; -4) \Longleftrightarrow \mathrm{S}(-7;7;-4)$$

Exercice 2. ♠♠

Dans un repère de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(-2;2;-1) \qquad B(2;0;3) \qquad C(-2;0;0) \qquad D(0;-4;1) \qquad E(-2;-1;-2)$$

1. Vérifier que A, B et C définissent bien un plan.
   A, B et C définissent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires.
   $\overrightarrow{AB}(4;-2;4)$ et $\overrightarrow{AC}(0;-2;1)$.
   Pour passer de $x_{\overrightarrow{AB}}$ à $x_{\overrightarrow{AC}}$ on multiple par 0, en revanche on a $y_{\overrightarrow{AB}} = y_{\overrightarrow{AC}}$, par conséquent il n'existe aucun réel t tel que $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
   (ABC) est un plan.

2. (a) Montrer que $\overrightarrow{DE}$ est colinéaire au vecteur $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{DE}(-2;3;-3)$ et $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}(-4+2\times 0;2+2\times 2;-4-2\times 1)$ i.e $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}(-4;6;-6)$.
   Au final on a :
   $$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right)$$
   On vient de démontrer que $\overrightarrow{DE}$ et $-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

   (b) Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
   D'après la question précédente :
   $$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
   On vient de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

   (c) Que peut-on en déduire sur la droite (DE) et le plan (ABC) ?
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC) et $\overrightarrow{DE}$ est un vecteur coplanaire à ce couple de vecteurs, on en déduit donc que :
   $$(DE)//(ABC)$$

3. (a) Le point E appartient-il au plan (ABC) ?
   On pourra regarder si les points A, B, C *et* E *sont coplanaires*
   Les points A, B, C et E sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :
   $$\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AC}$$
   On doit donc résoudre le système suivant (on rappelle que $\overrightarrow{AB}(4;-2;4)$, $\overrightarrow{AC}(0;-2;1)$ et $\overrightarrow{AE}(0;-3;-1)$) :
   $$\left\{\begin{array}{l} 0=4t+0t' \\ -3=-2t-2t' \\ -1=4t+t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 0=4t \\ -3=-2t-2t' \\ -1=4t+t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ -3=-2t' \\ -1=t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=0 \\ t'=1,5 \\ t'=-1 \end{array}\right.$$
   Le système n'admet aucun couple solution puisqu'il est impossible d'avoir en même temps $t'=-1$ et $t'=1,5$, par conséquent il n'existe aucun couple de réels t et t' tels que $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AC}$, ainsi les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.
   Par conséquent E n'est pas un point du plan (ABC).

   (b) Préciser alors votre réponse de la question **2.c)**
   (DE) est strictement parallèle au plan (ABC) puisque $E \notin (ABC)$.

Exercice 3. ♠♠♠

On donne les représentations paramétriques de droites suivantes :

$$d_1 : \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 3-6t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_3 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = -3-5t \\ z = 10 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad d_4 : \begin{cases} x = -3-2t \\ y = 4+t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Simone a utilisé le logiciel Xcasfr pour faire ses derniers exercices de géométrie dans l'espace.

```
1 resoudre([1+4t=3,2-2t=1,1+t=1.5],t)
                                        [1/2]
2 resoudre([1+4t=0,2-2t=5,1+t=3],t)
                                        []
3 resoudre([1+4t=3-6u,2-2t=2u,1+t=2-u],[t,u])
                                        [2, -1]
4 resoudre([1+4t=2-u,2-2t=-3-5u,1+t=10],[t,u])
                                        []
5 resoudre([1+4t=-3-2u,2-2t=4+u,1+t=-0.5u],[t,u])
                                        [t, -2.0×t-2.0]
```

Pour chaque commande entrée sur le logiciel :

- Rédiger la question que Simone pouvait vouloir résoudre,
  Il peut y avoir plusieurs questions possibles, en donner une seule suffit.
- Répondre à cette question grâce aux résultats donnés par le logiciel.

Question 1 : *Le point* A$(3;1;1.5)$ *appartient-il à* d_1 *?*

Réponse 1 : En choisissant $t = \frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de d_1 on obtient $x = 1+2 = 3$, $y = 2-1 = 1$ et $z = 1+0,5 = 1,5$. Effectivement on en déduit que $\mathrm{A} \in d_1$.

Question 2 : *Le point* B$(0;5;3$ *appartient-il à* d_1 *?*

Réponse 2 : Si tel était le cas on aurait $0 = 1+4t \iff t = -\frac{1}{4}$. En remplaçant t par $-\frac{1}{4}$ dans l'équation paramétrique de d_1 concernant les ordonnées on trouve

$$y = 2+2\times\frac{1}{4} = 2,5$$

Or, B n'a pas pour ordonnées $2,5$, on en déduit que $\mathrm{B} \notin d_1$.

Question 3 : *Les droites* d_1 *et* d_2 *sont-elles sécantes ?*

Réponse 3 : Si un point $\mathrm{M}(x;y;z) \in d_1 \cap d_2$ alors ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x = 1+4t = 3-6u \\ y = 2-2t = 2u \\ z = 1+t = 2-u \end{cases}$$

Résolvons les deux premières équations de ce système :

$$\begin{cases} x = 1+4t = 3-6u \\ y = 2-2t = 2u \end{cases} \iff \begin{cases} 4t+6u = 2 \\ -2t-2u = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+3u = 1 \\ -2t-2u = -2 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} 2t+3u=1 \\ u=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t-3=1 \Rightarrow 2t=4 \Rightarrow t=2 \\ u=-1 \end{cases}$$

Vérifions si $t=2$ et $u=-1$ satisfont la troisième équation du système initial :
D'une part, $1+2=3$ et d'autre part $2-(-1)=3$, ainsi $t=2$ et $u=-1$ est l'unique couple solution du système.
On en déduit que les droites d_1 et d_2 sont sécantes en un point C qui a pour coordonnées :

$$\mathrm{C}(1+8=9; 2-4=-2; 1+2=3) \iff \mathrm{C}(9;-2;3)$$

Question 4 : *Démontrer que d_1 et d_3 ne sont pas sécantes.*
Réponse : Si un point $\mathrm{M}(x;y;z) \in d_1 \cap d_2$ alors ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x=1+4t=2-u \\ y=2-2t=-3-5u \\ z=1+t=10 \end{cases}$$

Résolvons la première et la troisième équation de ce système :

$$\begin{cases} 4t+u=1 \\ 1+t=10 \Rightarrow t=9 \end{cases} \iff \begin{cases} 36+u=1 \Longrightarrow u=1-36=-35 \\ t=9 \end{cases}$$

Vérifions si $u=-35$ et $t=9$ satisfont la deuxième équation du système initial :
D'une part $2-2\times 9=2-18=-16$,
D'autre part $-3-5\times(-35)=-3+150+25=172$
On trouve ici des résultats différents ce qui prouve que le système n'admet aucune solution, par conséquent $d_1 \cap d_3 = \emptyset$.
Question 5 : *Montrer que $d_1 = d_4$*
Réponse : Le vecteur $\overrightarrow{u_1}(4;-2;1)$ dirige d_1 et le vecteur $\overrightarrow{u_4}(-2;1;-0,5)$ dirige d_4 ; de plus on a :

$$\overrightarrow{u_1} = -2\overrightarrow{u_4}$$

$\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_4}$ sont colinéaires, on en déduit que $d_1 // d_4$.
On sait d'après la question 1 que $\mathrm{A}(3;1;1.5) \in d_1$. Vérifions que $\mathrm{A} \in d_4$:
$3=-3-2t \iff -2t=6 \iff t=-3$.
Remplaçons t par -3 dans les deux dernières équations de d_4 en espérant retrouver les coordonnées de A :

$$y=4-3=1 \qquad \text{et} \qquad z=-\frac{1}{2}\times(-3)=\frac{3}{2}$$

On a vérifié que $\mathrm{A} \in d_4$.
Au final $d_1 // d_4$ et A est commun au deux droites, on en déduit que :

$$d_1 = d_4$$