Exercice 1. ♠♠

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points :

$$A(2;3;1) \quad B(4;1;0) \quad \text{et} \quad C(-1;1;3)$$

1. Déterminer une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon $r = 3$.

$$M(x;y;z)\in\mathscr{S} \Longleftrightarrow AM = r \Longleftrightarrow AM^2 = 9 \Longleftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2 = 9$$

2. Déterminer une représentation paramétrique du segment [AB].
$\overrightarrow{AB}(2;-2;-1)$ dirige le segment [AB], par conséquent :

$$M(x;y;z)\in[AB] \Longleftrightarrow \exists t\in[0;1], \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \exists t\in[0;1], \begin{cases} x-2=2t \\ y-3=-2t \\ z-1=-t \end{cases} \Longleftrightarrow \exists t\in[0;1], \begin{cases} x=2t+2 \\ y=-2t+3 \\ z=-t+1 \end{cases}$$

3. (a) Soit d la droite parallèle à (AB) qui passe par C. Donner un vecteur directeur de d puis une représentation paramétrique de d.
Puisque $d//(AB)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige d.

$$M(x;y;z)\in d \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x+1=2t \\ y-1=-2t \\ z-3=-t \end{cases} \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=2t-1 \\ y=-2t+1 \\ z=-t+3 \end{cases}$$

(b) Déterminer les coordonnées du point E de la droite d qui a pour abscisse 2.
On utilise la représentation paramétrique précédente, puisque $x_E = 2$ on a :

$$2 = 2t-1 \Longleftrightarrow 2t = 3 \Longleftrightarrow t\frac{3}{2}$$

E est obtenue pour $t = \dfrac{3}{2}$ on trouve son ordonnée et sa côte :

$$y_E = -2\times\frac{3}{2}+1 = -3+1 = -2 \qquad \text{et} \qquad z_E = -\frac{3}{2}+3 = \frac{3}{2}$$

$$E\left(2;-2;\frac{3}{2}\right)$$

(c) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre d et $\mathscr{S}$.

$$M(x;y;z)\in d\cap\mathscr{S} \Longleftrightarrow (2t-1-2)^2+(-2t+1-3)^2+(-t+3-1)^2 = 9 \Longleftrightarrow (2t-3)^3+(-2t-2)^2+(-t+2)^2 = 9$$

Au final :

$$4t^2-12t+9+4t^2+8t+4+t^2-4t+4 = 9 \Longleftrightarrow 9t^2-8t+8 = 0$$

$\Delta = 64-4\times9\times8 < 0$ cette équation n'admet pas de solution. On peut conclure que :

$$d\cap\mathscr{S} = \emptyset$$

4. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AC).

La droite (AC) admet $\overrightarrow{AC}(-3;-2;2)$ comme vecteur directeur.

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{AC}) \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AC} \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x-2=-3t \\ y-3=-2t \\ z-1=2t \end{cases} \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} x=-3t+2 \\ y=-2t+3 \\ z=2t+1 \end{cases}$$

(b) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre (AC) et $\mathscr{S}$.

$$\mathrm{M}(x;y;z)\in(\mathrm{AC})\cap\mathscr{S} \Longleftrightarrow (-3t+2-2)^2+(-2t+3-3)^2+(2t+1-1)^2=9 \Longleftrightarrow 9t^2+4t^2+4t^2=9 \Longleftrightarrow 17t^2=9 \Longleftrightarrow t=\pm\frac{3}{\sqrt{17}}$$

Puisque cette équation admet deux solutions il existe deux points d'intersection entre (AC) et $\mathscr{S}$, on obtient leurs coordonnées en remplaçant t par les valeurs trouvées dans la représentation paramétrique de (AC). Notons G et H ces deux points :

$$\mathrm{G}\left(-3\times\frac{3\sqrt{17}}{17}+2;-2\times\frac{3\sqrt{17}}{17}+3;2\times\frac{3\sqrt{17}}{17}+1\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}\left(3\times\frac{3\sqrt{17}}{17}+2;2\times\frac{3\sqrt{17}}{17}+3;-2\times\frac{3\sqrt{17}}{17}+1\right)$$

5. (a) On considère la droite Δ qui admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=2+3t \\ z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Démontrer que le milieu I du segment [AB] est un point de Δ.

$$\mathrm{I}\left(\frac{2+4}{2};\frac{3+1}{2};\frac{1+0}{2}\right) \Longleftrightarrow \mathrm{I}\left(3;2;\frac{1}{2}\right)$$

Déterminons la valeur de t dans l'équation paramétrique de Δ qui donne 3 pour abscisse :

$$3+2t=3 \Longleftrightarrow t=0$$

En remplaçant t par 0 dans la représentation paramétrique de Δ on trouve :

$$x=3 \quad y=2 \quad \text{et} \quad z=\frac{1}{2}$$

Ce sont les coordonnées du point I donc $\mathrm{I}\in\Delta$.

(b) Déterminer l'éventuel point d'intersection entre Δ et d.

Le vecteur $\vec{u}\left(2;3;-\frac{3}{2}\right)$ dirige Δ et le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-2;-1)$ dirige d. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires par conséquent les droites Δ et d sont non coplanaires ou sécantes.
Pour le savoir on cherche les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2t-1=3+2t' \\ -2t+1=2+3t' \\ -t+3=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2t-2t'=4 \\ -2t-3t'=1 \\ -t+\frac{3}{2}t'=-\frac{5}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t-t'=2 \\ -2t-3t'=1 \\ -t+\frac{3}{2}t'=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Déterminer la solution des deux premières équations :

$$\begin{cases} t - t' = 2 \\ -2t - 3t' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 + t' \\ -2(2+t') - 3t' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 + t' \\ -4 - 5t' = 1 \Longrightarrow -5t' = 5 \Longrightarrow t' = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 - 1 = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Vérifions que $t = 1$ et $t' = -1$ satisfont la troisième égalité.

$$-t + \frac{3}{2}t' = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

La troisième égalité est satisfaite.
Ainsi d et Δ sont sécantes en un point S dont les coordonnées sont :

$$\mathrm{S}\,(2-1; -2+1; -1+3) \iff \mathrm{S}\,(1; -1; 2)$$