∽ CORRECTION DU DEVOIR MAISON 3 ∽
LIMITES DE SUITES

Vous traiterez au choix un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1. ♠♠

Soient les suites u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 2n^2 + 3n + 1 \qquad v_n = 3n^3 - 4n + 2 \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{2n+3}{-n-5}$$

1. Déterminer la limite de la suite u.

   On a

   $$\lim_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} 3n+1 = +\infty$$

   Par somme on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} n^2 + 3n + 1 = +\infty$$

2. (a) Déterminer la limite de la suite v.

   L'expression de v_n est une forme indéterminée qu'il faut donc modifier :

   $$v_n = n^3\left(1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)$$

   Ainsi on a :

   $$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{4}{n^2} + \frac{2}{n^3} = 1$$

   Par produit on obtient :

   $$\lim_{n\to+\infty} = +\infty$$

   (b) Justifier que la suite v est croissante à partir du rang 1.

   Considérons la fonction f définie sur pour tout réel $x \geq 1$ par :

   $$f(x) = 3x^3 - 4x + 2$$

   Cette fonction est alors dérivable et pour tout $x \geq 1$ on a :

   $$f'(x) = 9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$$

   $f'(x)$ s'annule alors pour $x = \dfrac{2}{3}$ et pour $x = -\dfrac{2}{3}$, on obtient donc pour $x \geq 1$ le tableau de variation suivant :

x	1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

   On déduit de ce tableau de variation que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

   $$f(n+1) \geq f(n) \iff v_{n+1} \geq v_n$$

   La suite v est donc croissante à partir du rang 1.

   (c) Pour un réel A, on souhaite déterminer le rang à partir duquel $v_n \geq A$.

   Construire un algorithme permettant de résoudre ce problème. Programmer, puis déterminer le rang à partir duquel $v_n \geq 10^6$.

Algorithme 1 :

Données: n est un nombre entier et v est un nombre réel.
$n := 1$; $v := 1$
Tant que $(u < \mathrm{A})$ **Faire**
  $n := n+1$
  $v := 3n^2 - 4n + 2$
Fin Tant que
Afficher n

Traduisons cet algorithme dans un langage informatique, ici ce même algorithme écrit en python :

```
#Premier rang a partir duquel v dépasse A ; v_n=3n^3-4n+2

def DM3_limite(A):
    n=1
    v=1
    while v<A:
        n=n+1
        v=3*n**3-4*n+2
    print("Le premier rang à partir duquel v_n dépasse", A, "est :", n)

DM3_limite(1000000)
```

```
Python 3.3.2 Shell
File  Edit  Shell  Debug  Options  Windows  Help
>>>
Le premier rang à partir duquel v_n dépasse 1000000 est : 70
>>>
```

3. Déterminer la limite de la suite w.
L'expression de w est à modifier pour déterminer sa limite, ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$w_n = \frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(-1-\frac{5}{n}\right)} = \frac{2+\frac{3}{n}}{-1-\frac{5}{n}}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} 2+\frac{3}{n} = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} -1-\frac{5}{n} = -1$$

Par quotient on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{-1-\frac{5}{n}} = -2$$

Exercice 2. ♠♠

Trouver une suite :

1. non majorée mais qui ne tende pas vers $+\infty$.
   Considérons la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_n = (-2)^n$$
   Lorsque n est pair $u_n = 2^n$ et lorsque n est impair $u_n = -2^n$.
   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} = +\infty$, u n'est pas majorée.
   Enfin u n'admet pas de limite ; en particulier elle ne diverge pas vers $+\infty$ (en effet tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ avec $A > 0$ ne peut contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Dès que $u_n > A$ alors $u_{n+1} < A$ et ce quelque soit n)
2. croissante mais dont la limite n'est pas $+\infty$.
   Considérons la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$u_n = 1 - \frac{1}{n}$$
   - Montrons qu'elle est croissante.
     Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$
     On vient de montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} > u_n$$
     u est donc croissante.
   - Déterminons sa limite.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$
3. qui diverge vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
   Considérons la suite u définie pour tout entier n par :
$$u_n = 2n + n \times (-1)^n$$
   - Déterminons sa limite.
     On sait que pour tout entier n on a :
$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Longleftrightarrow -n \leq -n \times (-1)^n \leq n \Longleftrightarrow 2n - n \leq 2n - n \times (-1)^n \leq 2n + n \Longleftrightarrow n \leq u_n \leq 3n$$
     Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ d'après le théorème de comparaison on a :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$
   - Montrons qu'il n'existe aucun rang à partir duquel u est une suite croissante.
     Lorsque $n \neq 0$ est pair (dans ce cas $n+1$ est impair) on a :
$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + (n+1)^{\times}(-1)^{n+1} - (2n + n \times (-1)^n) = 2n+2-(n+1)-(2n+n) = 2n+2-n-1-2n-n = -2n+1 < 0$$
     Lorsque n est impair (dans ce cas $n+1$ est pair) on a :
$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + (n+1)^{\times}(-1)^{n+1} - (2n + n \times (-1)^n) = 2n+2+(n+1)-(2n-n) = 2n+2+n+1-2n+n = 2n+3 > 0$$

A partir d'aucun rang le signe de $u_{n+1} - u_n$ n'est constant, on en déduit que la suite u n'est pas croissante.

4. à termes strictement positifs et strictement décroissante mais qui ne converge pas vers 0.
Considérons la suite u définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Dans ce cas $u_n > 1$ puisque $\frac{1}{n} > 0$, u est donc à termes strictement positifs.
De plus

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n < 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_n$$

La suite est donc strictement décroissante.
Enfin puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

Exercice 3. ♠♠♠

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

1. Calculer u_2 ; u_3 et u_4.

$$u_2 = \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{9}{2}$$

$$u_3 = \frac{3}{2} \times \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{27}{4} - \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

$$u_4 = \frac{3}{2} \times \frac{21}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{63}{8} - \frac{9}{4} = \frac{63-18}{4} = \frac{45}{8}$$

2. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathscr{P}(n) : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

(a) ***Initialisation*** : $u_0 = 0$ et $\frac{1}{2} \times 0 + 3 = 3$, or $u_1 = 3$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
$\frac{1}{2} \times 3 + 3 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$ et $u_2 = \frac{9}{2}$ ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
$\frac{1}{2} \times \frac{9}{2} + 3 = \frac{9}{4} + 3 = \frac{9+12}{4} = \frac{21}{4}$ et $u_3 = \frac{21}{4}$ donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
$\frac{1}{2} \times \frac{21}{4} + 3 = \frac{21}{8} + 3 = \frac{21+24}{8} = \frac{45}{8}$ et $u_4 = \frac{45}{8}$ donc $\mathscr{P}(3)$ est vraie.
On pourrait bien inutilement poursuivre ainsi longtemps.... On a montré que la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée pour $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ (et en même temps on a vérifié que nos résultats de la première question était bon).

(b) ***Hérédité*** : Supposons qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et montrons que

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$$

D'après l'énoncé :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \Longleftrightarrow u_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}u_n \Longleftrightarrow u_n = 2u_{n+1} - 6$$

Mixons l'énoncé et l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}(2u_{n+1} - 6) = \frac{3}{2}u_{n+1} - u_{n+1} + 3 = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$$

Nous avons bien démontré que $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$, par conséquent dès que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

(c) ***Conclusion*** $\mathscr{P}$ est héréditaire et initialisée moulte fois à partir de $n = 0$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

3. On considère la suite v définie par :

$$v_n = u_n - 6$$

(a) Montrer que v est géométrique.
Pour tout entier naturel n on a (en utilisant le résultat de la question précédente) :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$$

v est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 0 - 6 = -6$.

(b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
Puisque v est une suite géométrique on a pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque $v_n = u_n - 6 \Longleftrightarrow u_n = v_n + 6$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

(c) En déduire la limite de la suite u.
Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -6 \times 0 + 6 = 6$$