∽ Correction du devoir maison 24 ∾
Loi Exponentielle - Loi Normale

Exercice 1. Une étude statistique a montré que la durée de vie en années X d'un disque dur DD pouvait être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle et que la durée de vie moyenne d'un disque dur DD était de 5 ans.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par X.
   L'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est :
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}$$
   Par conséquent :
   $$\frac{1}{\lambda} = 5 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$
2. Le disque dur DD est garanti 2 ans. Quelle probabilité, à 10^{-3} près, de disques durs DD sera retournée au fournisseur pour cause de panne ?
   On cherche donc $p(\mathrm{X} \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t} dt = \left[-e^{-\frac{1}{5}t}\right]_0^2 = -e^{-\frac{2}{5}} + e^0 = 1 - e^{-\frac{2}{5}} \simeq 0,330$
3. Calculer $p(\mathrm{X} \geq 3)$ et interpréter ce résultat.
   $$p(\mathrm{X} \geq 3) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{5}}\right) = e^{-\frac{3}{5}} \simeq 0,549$$
   Il y a plus d'une chance sur deux que la durée de vie du disque dur dépasse 3 ans.
4. Démontrer que $p_{\mathrm{X}\geq 2}(\mathrm{X} \geq 5) = p(\mathrm{X} \geq 3)$.
   $$p_{\mathrm{X}\geq 2}(\mathrm{X} \geq 5) = \frac{p\left((\mathrm{X} \geq 2) \cap (\mathrm{X} \geq 5)\right)}{p(\mathrm{X} \geq 2)} = \frac{p(\mathrm{X} \geq 5)}{p(\mathrm{X} \geq 2)}$$
   or, pour tout réel $t > 0$ on a $p(\mathrm{X} \geq t) = e^{-\frac{t}{5}}$, ainsi en particulier $p(\mathrm{X} \geq 3) = e^{-\frac{3}{5}}$. Par conséquent :
   $$p_{\mathrm{X}\geq 2}(\mathrm{X} \geq 5) = \frac{p(\mathrm{X} \geq 5)}{p(\mathrm{X} \geq 2)} = \frac{e^{-\frac{5}{5}}}{e^{-\frac{2}{5}}} = e^{-1+\frac{2}{5}} = e^{-\frac{3}{5}} = p(\mathrm{X} \geq 3)$$
5. Sachant qu'un disque dur DD n'est plus sous garantie, quelle est la probabilité, à 0,01 près, que sa probabilité de vie totale dépasse 5 ans ?
   On cherche donc $p_{\mathrm{X}\geq 2}(\mathrm{X} \geq 5)$ et d'après la question précédente on obtient :
   $$p_{\mathrm{X}\geq 2}(\mathrm{X} \geq 5) = p(\mathrm{X} \geq 3) = e^{-\frac{3}{5}} \simeq 0,549$$
6. Calculer la probabilité que le disque dur DD fonctionne entre 5 et 10 ans.
   $$p(5 \leq \mathrm{X} \leq 10) = \int_5^{10} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t} dt = \left[-e^{-\frac{1}{5}t}\right]_5^{10} = -e^{-\frac{10}{5}} + e^{-\frac{5}{5}} = e^{-1} - e^{-2} \simeq 0,2325$$

Exercice 2. Une compagnie de taxis possède 100 véhicules. On considère que chacun des véhicules a une probabilité de $0,1$ d'être en panne. Soit X le nombre de véhicules en panne dans cette compagnie.

1. Quelle est la loi de X ? Donner l'expression de $p(\mathrm{X} = k)$ pour tout entier naturel k compris entre 0 et 100.
   Chacun des 100 taxis peut être en panne ou non. Chaque taxis a la même probabilité d'être en panne que les autres, ainsi la variable aléatoire qui compte le nombre de taxis en panne suit une loi binomiale de paramètre 100 et $0,1$.
2. Calculer $p(0 \leq \mathrm{X} \leq 5)$ en vous aidant d'une calculatrice. Interpréter.
   $$p(0 \leq \mathrm{X} \leq 5) \simeq 0,0576$$
   La probabilité qu'il y ait moins de 5 taxis en panne vaut $0,0576$ environ.

3. Est-il raisonnable d'utiliser l'approximation fournie par le théorème de Moivre-Laplace pour calculer la probabilité précédente ?
   On considère que l'approximation fournie par le théorème de Moivre Laplace est raisonnable si $n = 100 \geq 30$, si $np = 100 \times 0,1 = 10 \geq 5$ et si $n(1-p) = 100 \times 0,95 = 90 \geq 5$. Les trois conditions sont remplies donc il est raisonnable d'utiliser l'approximation fournie par le théorème de Moivre Laplace.

4. Donner une valeur approchée de la probabilité demandée à l'aide de l'approximation précédente.
   $\mathrm{E(X)} = np = 10$ et $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{np(1-p)} = 3$ et de plus :

$$p(0 \leq \mathrm{X} \leq 5) = p\left(\frac{0-10}{3} \leq \frac{\mathrm{X}-10}{3} \leq \frac{5-10}{3}\right) = p\left(\frac{-10}{3} \leq \frac{\mathrm{X}-10}{3} \leq \frac{-5}{3}\right)$$

   D'après le théorème de Moivre Laplace on a :

$$p(0 \leq \mathrm{X} \leq 5) \simeq \int_{-\frac{10}{3}}^{-\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \simeq 0,0474$$