∽ Correction du Devoir Maison 22 ∾
Complexe

Exercice 1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

$$\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{9/16 + 3/16} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et donc :

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$$

2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pour tout entier naturel n :

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\right| = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_n$$

Par conséquent la suite est géométrique de raison $\frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

Puisque (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = r_0 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

(c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} OA_n = \lim_{n\to+\infty} |z_n| = \lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Et puisque $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$$

Par conséquent la longueur OA_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que R > P
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$R
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

(a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

Puisque $1 > 0,5$ on a $n = 1$ puis $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De nouveau comme $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0,5$ on a $n = 2$ et $R = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Puisque $\frac{3}{4} > 0,5$ on continue et $n = 3$ puis $R = \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Puisque encore $\frac{3\sqrt{3}}{8} > 0,5$ on continue et $n = 4$ puis $R = \frac{9}{16}$.

Puisque de nouveau $\frac{9}{16} > 0,5$ on continue et $n = 5$ puis $R = \frac{9\sqrt{3}}{32}$

Enfin $\frac{9\sqrt{3}}{32} < 0,5$ donc l'algorithme affiche :

$$n = 5 \qquad \text{lorsque l'utilisateur entre } P = 0,5$$

(b) Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet affiche affiche la plus petite valeur de n telle que $OA_n \leq p$.

4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Démontrons que :

$$\left(\overrightarrow{OA_{n+1}};\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Pour cela démontrons que le nombre complexe $\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}$ a pour argument $\pm\frac{pi}{2}[2\pi]$ c'est-à-dire démontrons que le nombre complexe $\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}}$ est un imaginaire pur.

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{z_n - \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n}{\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n} = \frac{z_n\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)}{\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i}{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i}$$

Poursuivons :

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{1-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)} = \frac{3-\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i-3}{12} = \frac{-4\sqrt{3}i}{12} = -\frac{\sqrt{3}i}{3} \in i\mathbb{R}$$

(b) On admet que $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

A_n est un point de l'axe des ordonnées si et seulement si l'argument de z_n vaut $\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $z_n = 0$.

Il est impossible que $z_n = 0$ puisque $r_n > 0$ pour tout entier naturel n.

Or, l'argument de z_n est $n\frac{\pi}{6}[2\pi]$, on est amené à résoudre :

$$n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Ecrivons cette égalité sans le modulo π :

$$n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent :

$$n\pi = 3\pi + 6k\pi \Longleftrightarrow n = 3+6k$$

Au final A_n

(c) Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

Les traits de construction seront apparents.