☙ Correction du devoir maison 20 ❧
Intégration

Dans ce devoir maison, les élèves désirant intégrer une classe préparatoire scientifique traiteront l'exercice 2, les autres traiteront l'exercice 1.

Exercice 1. PARTIE A.

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

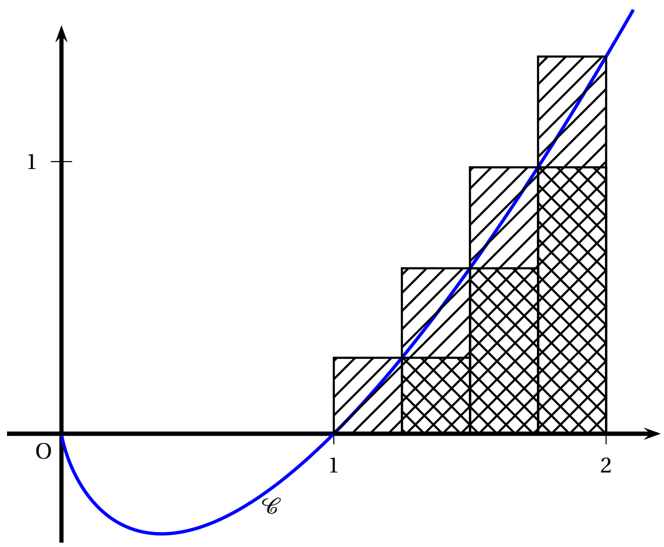
1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

PARTIE B.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-après).



Variables

k et n sont des entiers naturels

U, V sont des nombres réels

Initialisation

U et V prennent la valeur 0, n prend la valeur 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

$\mathrm{U} := \mathrm{U} + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

$\mathrm{V} := \mathrm{V} + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher U et V

Algorithme :

1. (a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
   (b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
   (c) En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.
2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_n &= \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]\\ \mathrm{V}_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right]\end{aligned}.$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $\mathrm{U}_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant \mathrm{V}_n$.

   (a) Trouver le plus petit entier n tel que $\mathrm{V}_n - \mathrm{U}_n < 0,1$.
   (b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

PARTIE C.

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

Correction :

Exercice 1

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)$.

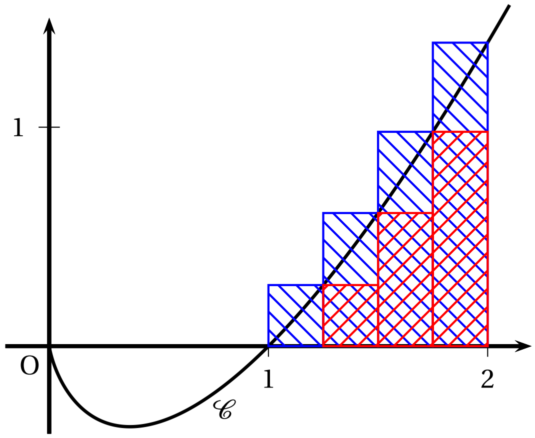
1. D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)=+\infty \text{ (par produit) donc } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :
   $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1$.
3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$: $\ln(x)+1>0 \iff \ln(x)>-1 \iff x>e^{-1}$
   Donc :
   - La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;e^{-1}]$;
   - la fonction f est strictement croissante sur $[e^{-1}\,;+\infty[$.

Partie B

Figure



Algorithme

Variables

k et n sont des entiers naturels

U, V sont des nombres réels

Initialisation

U prend la valeur 0

V prend la valeur 0

n prend la valeur 4

Traitement

Pour k allant de 0 à $n-1$

Affecter à U la valeur $\mathrm{U}+\dfrac{1}{n}f\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

Affecter à V la valeur $\mathrm{V}+\dfrac{1}{n}f\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

Affichage

Afficher U

Afficher V

1. (a) Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge) ; cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu) ; cette somme majore l'aire sous la courbe.

   (b) On fait tourner l'algorithme ci-dessus :

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,0698	4
	1	0,0697	0,2218	4
	2	0,2217	0,4667	4
	3	0,4666	0,8132	4
Affichage	On affiche la valeur de U : 0,4666			
	On affiche la valeur de V : 0,8132			

   (c) On peut donc en déduire que $0,4666 < \mathscr{A} < 0,8132$.

2. On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $\mathrm{U}_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant \mathrm{V}_n$.

   (a) Sachant que $\mathrm{U}_n = \dfrac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)\right]$ et que $\mathrm{V}_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)+f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)+f(2)\right]$,
   on peut dire que $\mathrm{V}_n-\mathrm{U}_n = \dfrac{1}{n}\big(f(2)-f(1)\big) = \dfrac{2\ln(2)-0}{n} = \dfrac{2\ln(2)}{n}$.
   $\mathrm{V}_n-\mathrm{U}_n < 0,1 \iff \dfrac{2\ln(2)}{n} < 0,1 \iff 2\ln(2) < 0,1\,n \iff \dfrac{2\ln(2)}{0,1} < n$
   Or $\dfrac{2\ln(2)}{0,1} \approx 13,86$ donc le plus petit entier n tel que $\mathrm{V}_n-\mathrm{U}_n$ soit inférieur à 0,1 est 14.
   Vérification : $\mathrm{V}_{13}-\mathrm{U}_{13} \approx 0,107 > 0,1$ et $\mathrm{V}_{14}-\mathrm{U}_{14} \approx 0,099 < 0,1$.

   (b) Pour obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n ; autrement dit, au lieu de « n prend la valeur 4 », on entrera « n prend la valeur 14 ».

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$.

1. $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{2x}{2}\times\ln(x) + \dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{4} = x\ln(x) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln(x) = f(x)$
   Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. La fonction f est croissante sur $[1\,;2]$ et $f(1)=0$ donc la fonction f est positive sur $[1\,;2]$; on peut donc dire que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
   $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(1) = (2\ln(2)-1) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$

Exercice 2. **Intégrale de Wallis et Intégration par parties**

PARTIE A. **Intégration par parties.**

Théorème 1.

On considère deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle $[a;b]$, alors on a :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

1. Rappeler la formule permettant de dériver le produit $u(t)\times v(t)$ puis à partir de cette égalité, par passage à l'intégrale démontrer le théorème.
   On sait que si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ alors pour tout t de l'intervalle $[a;b]$ on a :
   $$(u(t)v(t))' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$
   En intégrant le long du chemin $[a;b]$ on obtient :
   $$\int_a^b (u(t)v(t))'\,dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt$$
   Puis par linéarité de l'intégrale on obtient :
   $$\int_a^b (u(t)v(t))'\,dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Enfin par la formule de Newton Leibniz on a :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt \Longleftrightarrow \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

2. En utilisant le théorème, calculer $I = \int_a^b te^t dt$ puis $J = \int_1^x \ln(t) dt$.

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$, par conséquent $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^t$ et d'après le théorème on a :

$$I = [te^t]_a^b - \int_a^b e^t dt = be^b - ae^a - [e^t]_a^b = be^b - ae^a - e^b + e^a$$

On pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = 1$ on a alors $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$ donc :

$$J = [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x\ln x - \ln 1 - [t]_1^x = x\ln x - x + 1$$

PARTIE B. **Intégrales de Wallis**

On considère pour $n \in \mathbb{N}$ les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$$

1. Calculer I_0 puis I_1.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^1 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

2. En posant $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$ et appliquant le théorème 1, montrer que :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$u'(t) = (n+1)(\cos t)^n \times (-\sin t) = -(n+1)\sin t (\cos t)^n$ et $v(t) = \sin t$ donc d'après le théorème 1 on a :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)dt = \left[(\cos t)^{n+1}\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(n+1)\sin t (\cos t)^n \times \sin t dt$$

Ainsi :

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} dt$$

Au final

$$I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \Longleftrightarrow I_{n+2}(1+n+1) = (n+1)I_n \Longleftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$$

3. En déduire I_3 et I_4.

$$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{8} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

4. Montrer que :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Montrons ces deux propriétés par récurrence.

– ***Initialisation*** : Si $p = 0$ alors $I_{2p} = I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}} = \frac{0!\pi}{2^1} = \frac{\pi}{2}$ donc la formule est vérifiée pour $p = 0$.

De plus $I_{2p+1} = I_1 = 1$ et $\dfrac{2^0(0!)^2}{1!} = 1$, donc l'autre formule est vérifiée.

– ***Hérédité*** : Supposons que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}\left(p!\right)^2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ et montrons que :

$$I_{2p+2} = \frac{\left(2p+2\right)!\pi}{2^{2p+3}\left((p+1)!\right)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+3} = \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}$$

On sait que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$ ainsi $I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2p+2}I_{2p}$ donc en utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}\left(p!\right)^2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2}\frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}\left(p!\right)^2} = \frac{(2p+2)!\pi}{(2p+2)^2\left(2^{2p+1}\right)\left(p!\right)^2}$$

Or, $2^{2p+3}\left((p+1)!\right)^2 = 2^{2p+1}\times 4\times(p+1)^2\times\left(p!\right)^2 = 2^{2p+1}\times(4p^2+8p+4)\left(p!\right)^2 = 2^{2p+1}\times(2p+2)^2\left(p!\right)^2$.
Par conséquent :

$$I_{2p+2} = \frac{\left(2p+2\right)!\pi}{2^{2p+3}\left((p+1)!\right)^2}$$

On vient donc de démontrer par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}\left(p!\right)^2}$$

On procède de la même manière pour l'autre égalité :

$$I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1} = \frac{(2p+2)^2}{(2p+3)(2p+2)}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^2(p+1)^2\left(2^{2p}\right)\left(p!\right)^2}{(2p+3)!} = \frac{2^{2p+2}\left((p+1)!\right)^2}{(2p+3)!}$$

On vient donc de démontrer par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}$ on a

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$