∾ Correction du Devoir Maison 1 ∾
Suite arithmético-géométrique

Problème : Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à aillette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves.
On suppose que la population u lors de l'année n de Schblrurbs suit la loi suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite u pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et des paramètres a et b.
On cherche à estimer la population de Schblurbs dans l'avenir lointain, par deux techniques différentes dont l'une utilise la suite auxiliaire suivante :
la suite v est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

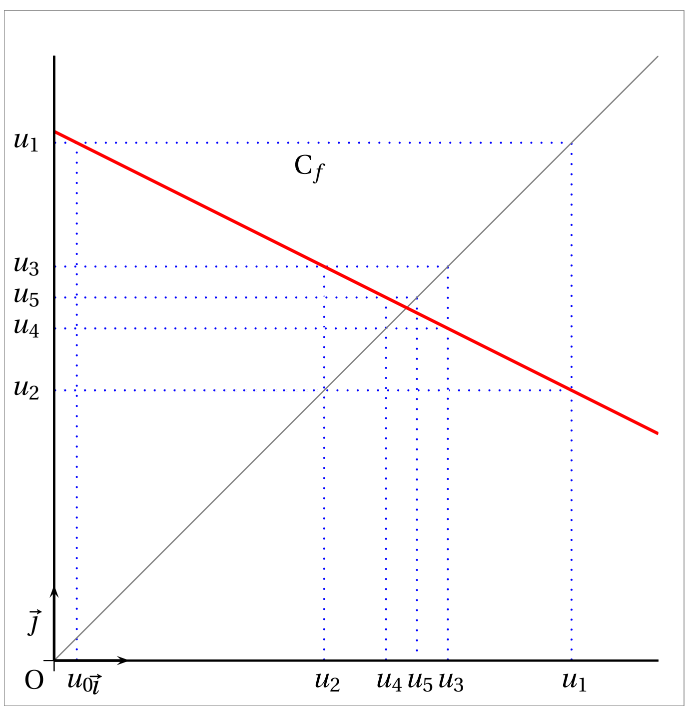
On se place dans le cas où

$$u_0 = 0,3 \qquad a = -0,5 \qquad \text{et} \qquad b = 7$$

1. Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   $u_1 = -0,5 \times 0,3 + 7 = 6,85$ Remarquons l'extraordinaire expanson du Schblurb qui en l'espace d'un an a vu sa population passée de 300000 individus à plus de 6 millions.
   $u_2 = -0,5 \times 6,85 + 7 = 3,575$
   Cette deuxième année a vu la population de Schblurb chutée de manière inquiétante, il faudra attendre la troisième année pour être rassuré :
   $u_3 = -0,5 \times 3,575 + 7 = 5,2125$

2. (a) Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Considérons la fonction f qui a un réel x associe $f(x) = -0,5x + 7$.
   On a alors, pour $x = u_n$:
   $$f(u_n) = -0,5u_n + 7 = u_{n+1}$$

   (b) A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.



   (c) Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.
   Il semble que la suite (u_n) converge vers l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = -0,5x + 7$ et $y = x$. Si on se contente d'une lecture graphique on observe que la limite $\ell \simeq 5$.

(d) Déterminer cette limite par le calcul.
En admettant que la suite converge, pour avoir une idée plus précise de la limite ℓ de cette suite, cherchons par le calcul l'abscisse du point d'intersection des droites d'équation $y = -0,5x + 7$ et $y = x$:

$$-0,5\ell + 7 = \ell \Longleftrightarrow 7 = 1,5\ell \Longleftrightarrow \ell = \frac{7}{1,5} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$

3. Vérifier que, pour tout entier n, on a :

$$v_n = u_n - \frac{14}{3}$$

D'après l'énoncé on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_n - \frac{b}{1-a} = u_n - \frac{7}{1+0,5} = u_n - \frac{14}{3}$$

4. Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
Montrer que v est géométrique revient à montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = v_n \times q \quad \text{où} q \in \mathbb{Z}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{14}{3} = -0,5u_n + 7 - \frac{14}{3} = -0,5u_n + \frac{21-14}{3} = -0,5u_n + \frac{7}{3} = -0,5\left(u_n + \frac{7/3}{-0,5}\right) = -0,5\left(u_n - \frac{7/3}{1/2}\right)$$

D'où :

$$v_{n+1} = -0,5\left(u_n - \frac{14}{3}\right) = -0,5v_n$$

v est bien une suite géométrique de raison $q = -0,5$.

5. Exprimer v_n en fonction de n.
D'après le cours, puisque v est une suite géométrique :

$$v_n = v_0 \times q^n = v_0 \times (-0,5)^n$$

De plus $v_0 = u_0 - \frac{14}{3} = 0,3 - \frac{14}{3} = \frac{9}{30} - \frac{140}{30} = -\frac{131}{30}$, ce qui donne au final :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = -\frac{131}{30} \times (-0,5)^n$$

6. En déduire que

$$u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

D'après la question 3. on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_n - \frac{14}{3}$$

Puisque $\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = -\frac{131}{30} \times (-0,5)^n$ on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad -\frac{131}{30} \times (-0,5)^n = u_n - \frac{14}{3} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

7. En déduire la limite ℓ de la suite u. Conclure..
On va utiliser le résultat de la question précédente. On sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \qquad \text{car : } -1 < -\frac{1}{2} < 1$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{131}{30}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Au final :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{131}{30}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3} = \frac{14}{3}$$

Ainsi $\ell = \dfrac{14}{3} \simeq 4,67$. La population de Schblurb, le temps passant, se stabilisera autour de $4,67$ millions d'individus.