CORRECTION DU DEVOIR MAISON 18
LOGAIRTHME NÉPÉRIEN

Dans ce devoir maison, il est obligatoire de traiter un exercice. Les élèves qui ont obtenu au bac blanc une note inférieure ou égale à 7 traiteront l'exercice 1, ce qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 12 traiteront l'exercice 2, les autres ont le choix de l'exercice.

Exercice 1.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

Comme :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} 1+\frac{1}{x} = +\infty$$

Or,

$$\lim_{X\to +\infty} \ln X = +\infty$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

De plus

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

Et donc :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

(b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonction dérivable et pour tout $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} - 1 = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - 1 = \frac{-x}{x^2(x+1)} - 1 = \frac{-x-x^2(x+1)}{x^2(x+1)} = -\frac{x(1+x(x+1)}{x^2(x+1)}$$

Comme $x > 0$ on a immédiatement $\dfrac{x(1+x(x+1)}{x^2(x+1)} > 0$ et donc $f'(x) < 0$ ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

(c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ et est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty;+\infty[$, par conséquent d'après une conséquence du TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

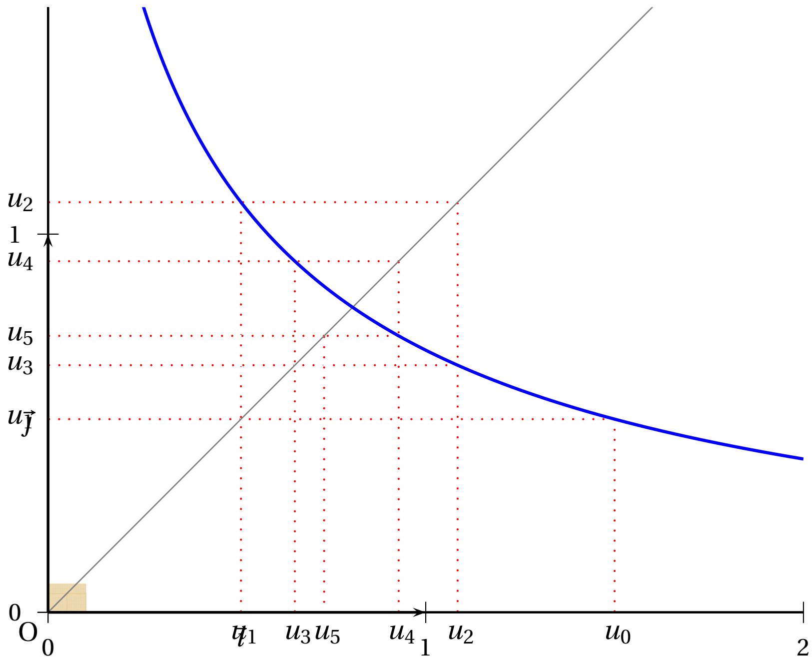
On a :

$$0,806 < \alpha < 0,807$$

2. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.



(a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ? On recopiera sur la copie le numéro de la conjecture suivie de OUI ou NON. Aucune justification n'est demandée.

★ Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »

Cette suite n'est pas monotone puisque $u_0 > u_1$ et que $u_2 > u_1$.

★ Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »

Le graphique porte à le croire.

★ Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

Il semblerait qu'elle converge vers un nombre inférieur à 1, vers l'abscisse du point d'intersection des deux courbes i.e. vers la solution de l'équation $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x$ i.e. vers α.

(c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.

Montrer que $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = \ell$.

Puisque $u_{n+1} = g(u_n)$, que g est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ il vient par passage à la limite que :

$$\ell = g(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)$$

(d) Montrer que $\ell = \alpha$.

Comme d'après précédente on a $\ell = \ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) \Longleftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) - \ell = 0 \Longleftrightarrow f(\ell) = 0$, or on a déjà démontré que $f(x) = 0$ admettait une unique solution α dans $]0;+\infty[$, par conséquent :

$$\ell = \alpha$$

Exercice 2. On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.
On se propose de rechercher, dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, les solutions de l'équation

$$\mathrm{E}_a : x^a = a^x.$$

On rappelle que pour tout $\lambda > 0$ et pour tout réel x on a :

$$\lambda^x = e^{\ln \lambda^x} = e^{x \ln \lambda}$$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.
   Si $a = 2$ et si $x = 2$ l'équation E_a est satisfaite en effet :
   $$2^2 = 2^2!$$
   Si $a = 2$ et si $x = 4$ de nouveau l'équation E_a est satisfaite puisque :
   $$4^2 = 2^4 = 16$$
2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.
   Pour $x = a$ E_a est l'égalité $a^a = a^a$, égalité qui effectivement est toujours vérifié.
3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.
   On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = x - \mathrm{e}\ln x$.

   (a) **Question de cours :** On rappelle que lorsque t tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
   On pose $\mathrm{X} = e^t \Longleftrightarrow \ln \mathrm{X} = t$, lorsque t tend vers $+\infty$, e^t tend vers $+\infty$ i.e. X tend vers $+\infty$ ce qui donne :
   $$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\mathrm{X}}{\ln \mathrm{X}} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{X}}{\ln \mathrm{X}}} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\ln \mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0$$

   (b) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
   $$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$$
   De plus pour $x > 0$ on a :
   $$h(x) = x\left(1 - e\frac{\ln x}{x}\right)$$
   Et puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ il vient que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - e\frac{\ln x}{x} = 1$ puis par produit on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$$

   (c) Etudier les variations de h sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$ h est dérivable (comme d'habitude...) et :
   $$h'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x - e}{x}$$
   Puisque $x > 0$, $h'(x)$ est du signe de $x - e$ qui s'annule pour $x = e$, on obtient le tableau de variation de h suivant :

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

(d) Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

On cherche à résoudre l'équation :

$$e^x = x^e \iff e^x - x^e = 0 \iff e^x - e^{\ln x^e} = 0 \iff e^x - e^{e\ln x} = 0 \iff e^x = e^{e\ln x} \iff x = e\ln x \iff x - e\ln x = 0$$

Ainsi on cherche à résoudre l'équation $h(x) = 0$.
Or, sur l'intervalle $]0; e[$ la fonction h est strictement décroissante donc pour tout $x < e$ on a $h(x) < h(e) = 0$, ainsi il n'existe aucune valeur de $x < e$ telle que $h(x) = 0$.
De même h étant strictement croissante sur $]e; +\infty[$, pour tout $x > e$ on a $h(x) > h(e) = 0$ ainsi il n'existe aucune valeur de $x > e$ telle que $h(x) = 0$.
L'équation E_e admet donc une unique solution dans $]0; +\infty[$ qui est $x = e$.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

x est solution de E_a si et seulement si :

$$a^x = x^a \iff e^{\ln a^x} = x^a \iff e^{x\ln a} = x^a \iff x\ln a = \ln x^a \iff x\ln a = a\ln x \iff \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln x}{x}$$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

(a) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

ce qui implique que la représentation graphique de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
De plus

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ce qui implique par produit que :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

ce qui implique que la représentation graphique de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

(b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ qui s'annule lorsque $x = e$.
De plus $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x$,
Par conséquent $f'(x) > 0 \iff 0 < x < e$ donc f est strictement croissante sur $]0; e[$ et f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$

(c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) : si $a \in]0\,;\,1]$, alors E_a admet l'unique solution a ;

Si $0 < a \leq 1$ alors $\ln a < 0$ et $\dfrac{\ln a}{a} < 0$ par conséquent l'équation E_a qui a le même ensemble de solution que l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$ ne peut admettre des solutions que si $x < 1$ (dans le cas contraire on aurait $\dfrac{\ln x}{x} > 0$). f est enfin une fonction continue, strictement croissante sur $]0;1]$ à valeurs dans $]-\infty;0]$ donc l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$ admet d'après une conséquence du TVI une unique solution. a étant une solution de l'intervalle $]0;1]$ il vient que c'est l'unique.

(P_2) : si $a \in]1\,;\,e[\cup]e\,;\,+\infty[$, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle $]1\,;\,e[$ et l'autre appartenant à l'intervalle $]e\,;\,+\infty[$.

Si $1 < a < e$ d'après le tableau de variation de f on a :

$$f(1) < f(a) < f(e) \iff \frac{\ln 1}{1} < \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln e}{e} \iff 0 < \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$$

f étant continue et strictement croissante sur $]1;e[$ à valeurs dans $\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$ donc d'après le TVI l'équation $f(x) = \dfrac{\ln a}{a}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1;e[$ qui est $x = a$ (puisque a est solution i.e. E_a admet pour unique solution $x = a$ dans l'intervalle $]1;e[$.

De même dans l'intervalle $]e;+\infty[$ f est continue et strictement décroissante dans l'intervalle $]e;+\infty[$ à valeurs dans $\left]\dfrac{1}{e};+\infty\right[$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{\ln a}{a}$ admet d'après le TVI une unique solution dans l'intervalle $]e;+\infty[$ que nous noterons b.

Si $a > e$ alors puisque f est strictement décroissante sur $]e;+\infty[$ alors

$$\frac{\ln a}{a} < \frac{1}{e}$$

Et d'après le TVI appliqué successivement sur l'intervalle $]1;e[$ puis sur l'intervalle $]e;+\infty[$ l'équation E_a admet deux solutions l'une dans $]1;e$ qui est b et l'autre dans $]e;+\infty[$ qui est a.