∾ Correction du Devoir Maison 17 ∾
Logairthme Népérien

Dans ce devoir maison, il est obligatoire de traiter un exercice. Les élèves qui ont obtenu au bac blanc une note inférieure ou égale à 7 traiteront l'exercice 1, ce qui ont obtenu une note supérieure ou égale à 12 traiteront l'exercice 2, les autres ont le choix de l'exercice.

Exercice 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

(a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

Pour $i = 1$, on a :

$$u = \sqrt{2}$$

Pour $i = 2$ on a :

$$u = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

Pour $i = 3$ on a :

$$u = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \simeq 1.8340$$

(b) Que permet de calculer cet algorithme ? Cet algorithme permet de calculer le terme u_n.

(c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Il semblerait qu'elle soit croissante, majorée par 2, et même convergente vers 2.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

Indication : On pourra raisonner par récurrence.

Notons $\mathscr{P}(n) : 0 < u_n < 2$ et raisonnons par récurrence.

– ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et donc on a :

$$0 < u_0 < 2$$

$\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$.

– ***Hérédité*** : Supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.
On a :

$$0 < u_n < 2 \Longleftrightarrow 0 < 2u_n < 4$$

ce qui donne :

$$\sqrt{0} < \sqrt{2u_n} < \sqrt{4} \Longleftrightarrow 0 < u_{n+1} < 2$$

$\mathscr{P}$ est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : On en déduit que la propriété vraie pour tout entier naturel n puisque initialisée et héréditaire.

(b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
Indication : On pourra raisonner par récurrence.

Notons $\mathscr{Q}(n)$: $u_n < u_{n+1}$ et raisonnons par récurrence.

– ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \simeq 1.41$ et donc on a :

$$u_0 < u_1$$

$\mathscr{Q}$ est initialisée à partir de $n = 0$.

– ***Hérédité*** : Supposons que $u_n < u_{n+1}$ et montrons que $u_{n+1} < u_{n+2}$.
On a :

$$u_n < u_{n+1} \Longleftrightarrow 2u_n < 2u_{n+1}$$

ce qui donne :

$$\sqrt{2u_n} < \sqrt{2u_{n+1}} \Longleftrightarrow u_{n+1} < u_{n+2}$$

$\mathscr{Q}$ est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : On en déduit que la propriété vraie pour tout entier naturel n puisque initialisée et héréditaire.

(c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

La suite u est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers un réel $\ell \geq 2$.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 2 = \ln \sqrt{2u_n} - \ln 2 = 0,5\ln(2u_n) - \ln 2$$

$$v_{n+1} = 0,5\ln 2 + 0,5\ln u_n - \ln 2 = -0,5\ln 2 + 0,5\ln u_n = 0,5\,(\ln u_n - \ln 2) = 0,5v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln u_0 - \ln 2 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

(b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n, puisque (v_n) est géométrique, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et donc :

$$\ln u_n - \ln 2 = -\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longleftrightarrow \ln u_n = \ln 2 - \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et donc :

$$\ln u_n = \ln 2\left(1 - 0,5^n\right) \Longleftrightarrow e^{\ln u_n} = e^{\ln 2(1-0,5^n)}$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n). On a, puisque $-1 < 0,5 < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} 0,5^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1 - 0,5^n = 1$$

Par produit :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln 2\left(1 - 0,5^n\right) = \ln 2$$

et donc par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln 2(1-0,5^n)} = e^{\ln 2} = 2 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
pour $n=1$ on a $u_2 = \dfrac{1+1}{2}u_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}$
pour $n=2$ on a $u_3 = \dfrac{2+1}{4}u_2 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$
pour $n=3$ on a $u_4 = \dfrac{3+1}{6}u_3 = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
Notons $\mathscr{P}(n) : u_n > 0$.
   – ***Initialisation*** : pour $n=0$ on a $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$, ainsi la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n=0$.
   – ***Hérédité*** : Montrons l'implication $u_n > 0 \Longrightarrow u_{n+1} > 0$
   Puisque $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}u_n$ et comme $u_n > 0$ et $n > 0$ on a trivialement $u_{n+1} > 0$.
   $\mathscr{P}$ est héréditaire.
   – ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n=0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a montré par récurrence que :
   $$u_n > 0$$
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   Si $n \geq 1$ alors $n+n \geq 1+n \Longrightarrow 2n \geq n+1 \Longrightarrow 1 \geq \dfrac{n+1}{2n} \Longrightarrow u_n \geq \dfrac{n+1}{2n}u_n \Longrightarrow u_n \geq u_{n+1}$ ce qui prouve que la suite est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
   Cette suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n = \dfrac{u_n}{n}$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2}\times\frac{u_n}{n} = \frac{1}{2}v_n$$
   $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{u_1}{1} = u_1 = \dfrac{1}{2}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$
   Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = \dfrac{1}{2}$ on a pour tout entier naturel $n \geq 1$:
   $$v_n = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
   ce qui implique que, pour tout $n \geq 1$:
   $$\frac{u_n}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Longleftrightarrow u_n = n\times\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$$
4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 1$ on a :

$$f(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - \ln 2\right)$$

D'après le cours on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - \ln 2 = -\ln 2 < 0$$

et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f(n) = \ln n - n\ln 2 = \ln n - \ln 2^n = \ln \frac{n}{2^n} = \ln u_n$$

De plus on vient de démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ ce qui prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = -\infty$$

donc par composition on a :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\ln u_n} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

5. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n < 0,001$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 0.5
Traitement :	Tant que $u \geq 0,001$
	$u := \frac{n+1}{2n} \times u$
	$n := n+1$
Sortie :	Afficher n