Devoir Maison 16
Objectif Bac

Ce devoir maison est facultatif et « à la carte ». C'est à dire que chaque élève traitera les exercices de son choix. Le dernier délai pour me rendre votre travail est le vendredi 7 février car sinon je n'aurai pas le temps de corriger. Il est bien évident que je ne peux pas en un seul devoir mettre toutes les notions donc il faut aussi réviser par vous même...

Exercice 1. **Exponentielle et suite (vous en avez rêvé...)**

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On a pour tout réel x :

$$f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x/x}$$

Or, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, par conséquent puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X} = 0$ on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

(b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

On a pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$f'(x)$ est du signe de $1-x$ puisque pour tout $x \geq 0$ on a $e^{-x} > 0$.

On en déduit :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

2. (a) Montrer que, pour tout réel m de $\left]0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

Sur l'intervalle $]0;1[$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus f est à valeurs dans l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$, par conséquent d'après un corollaire du TVI l'équation $f(x) = m$ admet pour $m \in \left]0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ exactement une solution dans $]0;1[$.

De la même manière sur l'intervalle $]1;+\infty[$, f est continue et strictement décroissante à valeurs dans $\left]0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$ donc l'équation $f(x) = m$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$ pour toute valeurs de $m \in \left]0\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right[$.

Au final $f(x) = m$ admet exactement deux solutions dans $[0;+\infty[$.

(b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).

Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

D'après la question précédente l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$ admet deux solutions dans $[0;+\infty[$ et la plus petite $\alpha \in]0;1[$. La calculatrice fournit une approximation de α qui est à 10^{-2} près :

$$\alpha \simeq 0,36$$

(c) Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Si $m = 0$, on a $f(x) = 0 \Longleftrightarrow xe^{-x} = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad$ ou $\quad e^{-x} = 0$.
Puisque $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ est $x = 0$.
Si $m = \frac{1}{e}$, alors d'après le tableau de variation de f on a pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) < \frac{1}{e}$$

et pour $x = 1$ on a $f(x) = \frac{1}{e}$.
Par conséquent $x = 1$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{e}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & u_n \mathrm{e}^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**

(a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n > 0$$

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n > 0$ et montrons cette propriété par récurrence.

- ***Initialisation*** : Si $n = 0$ alors $u_0 = \alpha \simeq 0,36 > 0$ donc $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
- ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$.
  On sait que $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, or $e^{-u_n} > 0$ puisque pour tout réel x on a $e^x > 0$. De plus si on suppose $u_n > 0$ on obtient par produit de deux nombres positifs strictement :

  $$u_{n+1} > 0$$

  $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a :

  $$u_n > 0$$

(b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Notons $\mathscr{Q}(n) : 1 > u_n > u_{n+1} > 0$ et montrons cette propriété par récurrence.

- ***Initialisation*** : Si $n = 0$ alors $u_0 = \alpha \simeq 0,36$ et $u_1 = \alpha e^{-\alpha} = \frac{1}{4} = 0,25$ par définition de α. On observe que

  $$1 > u_0 > u_1 > 0$$

  donc la propriété $\mathscr{Q}$ est vraie pour $n = 0$.

– ***Hérédité*** : Montrons que si $1 > u_n > u_{n+1} > 0$ alors $1 > u_{n+1} > u_{n+2} > 0$.
Puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;1[$ de :

$$1 > u_n > u_{n+1} > 0$$

On tire :

$$f(1) > f(u_n) > f(u_{n+1}) > f(0)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{e} > u_{n+1} > u_{n+2} > 0$$

Et comme $\frac{1}{e} < 1$ on obtient :

$$1 > u_{n+1} > u_{n+2} > 0$$

La propriété $\mathscr{Q}$ est donc héréditaire.

– ***Conclusion*** : $\mathscr{Q}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > u_{n+1}$ ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement décroissante.

(c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

La suite (u_n) est strictement décroissante et est aussi minorée par 0, par conséquent (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

De plus on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = xe^{-x}$ qui est une fonction continue sur $[0;1]$ donc par passage à la limite on obtient :

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \ell e^{-\ell} \Longleftrightarrow 1 = e^{-\ell} \Longleftrightarrow \ln 1 = \ln e^{-\ell} \Longleftrightarrow 0 = -\ell \Longleftrightarrow \ell = 0$$

On conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = v_n \mathrm{e}^{-v_n}$$

Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait $u_n = v_n$?
Si oui, préciser laquelle.

On a dans un premier $v_1 = v_0 e^{-v_0}$ et $u_1 = \alpha e^{-\alpha} = \frac{1}{4}$. On cherche donc v_0 tel que :

$$v_0 e^{-v_0} = \frac{1}{4}$$

Cette équation admet deux solutions d'après la partie A, une α et l'autre β. Il existe donc une unique valeur différente de α telle que $u_1 = v_1$, il s'agit de β.

Trivialement si $u_1 = v_1$ alors pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a $u_n = v_n$.

Exercice 2. **Des complexes**

Pour tout point P, on convient de noter son affixe z_P.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^3 + 8 = 0$$

(a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z,

$$z^3 + 8 = (z+2)(z^2 + az + b)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$(z+2)(z^2+az+b) = z^3 + az^2 + bz + 2z^2 + 2az + 2b = z^3 + (2+a)z^2 + (2a+b)z + 2b$$

Par identification on doit avoir $2b = 8 \Longrightarrow b = 4$ puis $2a + b = 0 \Longrightarrow 2a = -4 \Longrightarrow a = -2$ puis $2 + a = 0$ ce qui est vérifié pour $a = -2$.

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$$

(b) Résoudre alors l'équation (E) (on donnera les solutions sous leur forme algébrique).

$z^3 + 8 = 0 \Longleftrightarrow (z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -2 \quad$ ou $\quad z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$, l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ admet donc deux racines complexes conjugués qui sont :

$$z_2 = \frac{2 - \sqrt{12}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i \qquad \text{et} \qquad z_3 = 1 + \sqrt{3}i$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de l'équation (E) est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{-2 ; 1 - \sqrt{3}i ; 1 + \sqrt{3}i\right\}$$

(c) Ecrire ces solutions sous leur forme exponentielle.

$z_1 = -2 = 2 \times (-1) = 2e^{-i\pi}$.

$z_2 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Et enfin $z_3 = \overline{z_2} = \overline{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. On considère les points $A(-2)$, $B(1 - i\sqrt{3})$, $C(1 + i\sqrt{3})$ et D le milieu du segment [OB].

(a) Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure.

La construction proposée n'utilise que le compas et la règle non graduée, elle est visible à la fin de cet exercice.

(b) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

$AB = |z_B - z_A| = |1 - i\sqrt{3} + 2| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |1 + i\sqrt{3} + 2| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

Et enfin :

$$BC = |z_C - z_B| = |1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

On obtient $AB = AC = BC$ ce qui prouve que ABC est équilatéral.

(c) Déterminer l'affixe z_L du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

AODL est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LD}$. Ainsi AODL est un parallélogramme si et seulement si

$$z_{\overrightarrow{AO}} = z_{\overrightarrow{LD}} \Longleftrightarrow z_O - z_A = z_D - z_L$$

On obtient alors :

$$-z_L = z_O - z_A - z_D \Longleftrightarrow z_L = -z_O + z_A + z_D$$

Or, $z_{\mathrm{O}} = 0$, $z_{\mathrm{A}} = -2$ et $z_{\mathrm{D}} = \dfrac{z_{\mathrm{O}} + z_{\mathrm{B}}}{2} = \dfrac{z_{\mathrm{B}}}{2} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où :

$$z_{\mathrm{L}} = 0 - 2 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(d) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ sont orthogonaux.

$z_{\overrightarrow{\mathrm{OL}}} = z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{O}} = z_{\mathrm{L}} = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$z_{\overrightarrow{\mathrm{AL}}} = z_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{A}} = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, d'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On calcule le produit scalaire des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AL}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

Puisque $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AL}} = 0$ on a $\overrightarrow{\mathrm{OL}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AL}}$.

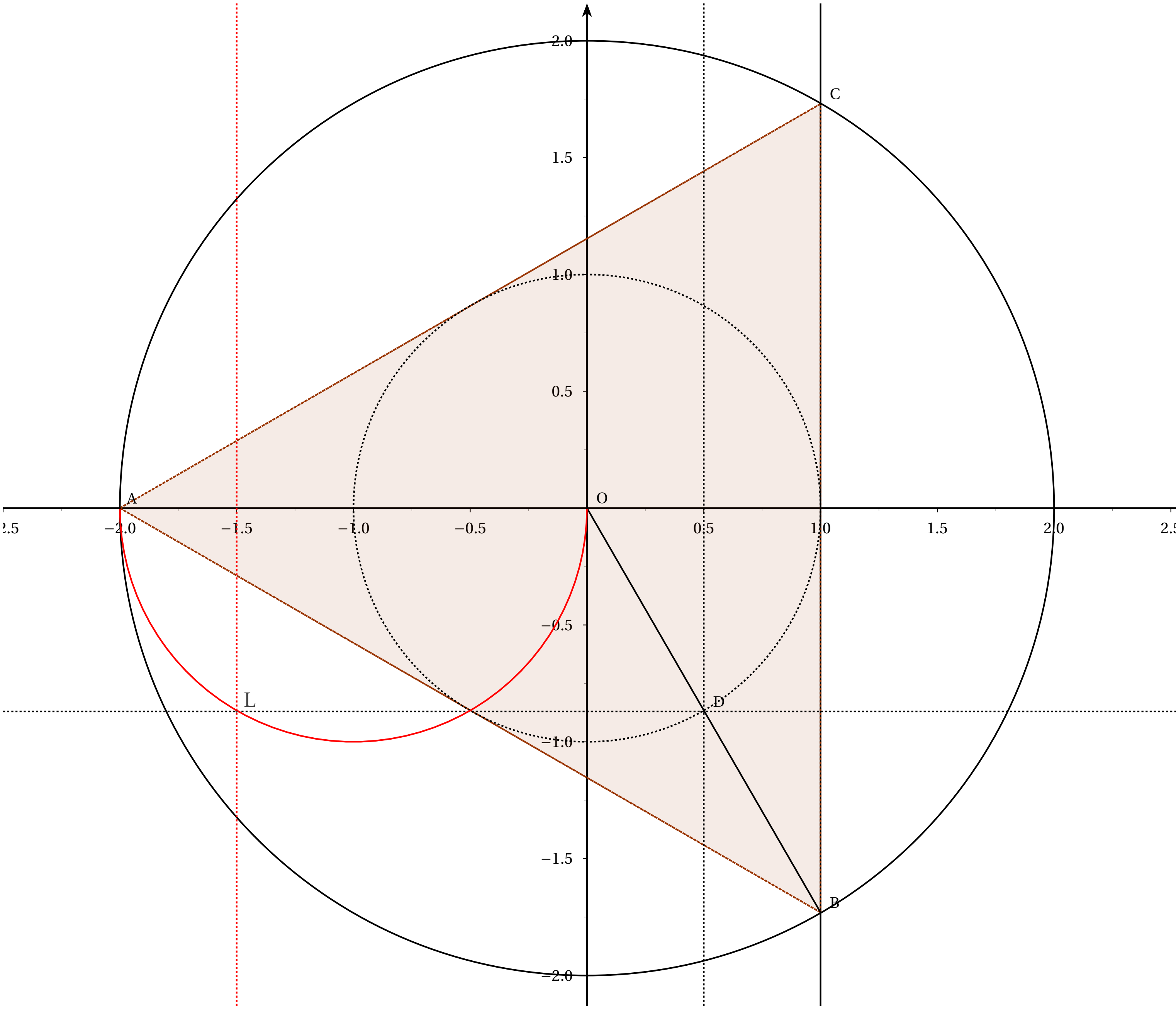
(e) En déduire que L appartient au cercle de diamètre [OA].

On vient de démontrer que le triangle OAL est rectangle en L, par conséquent L est un point du cercle de diamètre [OA].

(f) Placer alors L sur la figure.

Deux méthodes sont présentés pour placer le point L sur la figure à l'aide simplement du compas et de la règle non graduée.

La première utilise les traits de construction en rouge et la seconde les traits de construction en pointillé.



Exercice 3. **Des probabilités**

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.

   On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».

   Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

   On a par lecture de l'énoncé :

   $$p(P) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad p(T) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \qquad \text{et enfin} \qquad p(P \cap T) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

   De plus $p(P) \times p(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} = p(P \cap T)$, par conséquent les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

   (a) On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_1)$.

   (b) On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p_{T_1}(T_2)$, puis $p_{\overline{T_1}}(T_2)$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p\left(T_2 \cap \overline{T_1}\right)$.
   (On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

   Si le premier élève appartient au club théâtre, il n'en reste plus qu'un qui fait partie du club théâtre sur les neuf restants d'où :
   $$p_{T_1}(T_2) = \frac{1}{9}$$
   Dans le cas où le premier élève choisit ne fait pas partie du club théâtre, il en reste encore deux sur les neufs restants qui en font partie d'où :
   $$p_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{2}{9}$$
   On en déduit que :
   $$p(T_2 \cap T_1) = p_{T_1}(T_2) \times p(T_1) = \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{45}$$
   et de même :
   $$p\left(T_2 \cap \overline{T_1}\right) = p(\overline{T_1}) \times p_{\overline{T_1}}(T_2) = \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

   (c) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2. On a :
   $$p(T_2) = p(T_2 \cap T_1) + p\left(T_2 \cap \overline{T_1}\right) = \frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5} = 0,2$$

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

   Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

   Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre d'élève du club théâtre photographié au bout de 4 semaines. On repète 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, donc X suit la loi binomiale de paramètre 4 et $\frac{1}{5}$, on en déduit que :
   $$p(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^4$$