∽ CORRECTION DEVOIR MAISON 14 ∽
NOMBRES COMPLEXES

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1. ♠

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 1 - i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} i$$

1. Préciser les parties réelles de z_1 et de z_2. La partie réelle de z_1 est 1, celle de z_2 est $-\frac{1}{4}$, puis la partie imagine de z_1 est -1 et celle de z_2 est $\frac{1}{3}$.
2. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :
   (a) $z_1 - z_2 = 1 - i + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} i = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} i$
   (b) $z_1 + z_2 = 1 - i - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} i = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} i$
   (c) $z_1 \times z_2 = (1-i)\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} i + \frac{1}{4} i - \frac{1}{3} i^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{4+3}{12} i = \frac{1}{12} + \frac{7}{12} i$
   (d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} i} = \frac{12 - 12i}{-3 + 4i} = \frac{(12-12i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-36 - 48i + 36i - 48}{9 - (4i)^2} = \frac{-84 - 12i}{9 + 16} = -\frac{84}{25} - \frac{12}{25} i$
   (e) $z_1^2 = (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$
   (f) $z_1^3 = (1-i)^3 = (1-i)(1-i)^2 = (1-i)(-2i) = -2i + 2i^2 = -2i - 2$
   (g) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$
   (h) $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} i} = \frac{12}{-3+4i} = \frac{12(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-36 - 48i}{9 - 16i^2} = \frac{-36 - 48i}{25} = \frac{-36}{25} - \frac{48}{25} i$

Exercice 2. ♠

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   (a) $z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = i \quad$ ou $\quad z = -1$;
   (b) $3(z-5)^2 + 27 = 0 \iff 3(z-5)^2 = -27 \iff (z-5)^2 = -9 \iff z - 5 = 3i \quad$ ou $\quad z - 5 = -3i \iff z = 5 + 3i \quad$ ou $\quad z = 5 - 3i$
2. x désigne un nombre réel.
   (a) A quelle condition le nombre complexe $z = x - 2 - i(-ix + x) + 2i - 5ix$ est-il un nombre réel ?
   z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
   Simplifions l'écriture de z :
   $$z = x - 2 + i^2 x - ix + 2i - 5ix = x - 2 - x + i(2 - x - 5x) = -2 + i(2 - 6x)$$
   Donc z est réel si et seulement si $2 - 6x = 0 \iff x = \frac{1}{3}$.
   (b) A quelle condition est-il un imaginaire pur ?
   Etant donné que la partie réelle de z est -2, il est impossible que z soit un imaginaire pur.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{-i}{2z-3} = 4$.
   $$\frac{-i}{2z-3} = 4 \iff -i = 4(2z-3) = 8z - 12 \iff 8z = -i + 12 \iff z = \frac{12}{8} - \frac{1}{8} i = \frac{3}{2} - \frac{1}{8} i$$