∾ DEVOIR MAISON 10 ∾
RÉVISIONS : SUITES, ESPACES, FONCTIONS.

Ce devoir maison de révisions, de préparation au DS3 est facultatif. Il est cependant fortement conseillé de faire tous les exercices.

Exercice 1. ♠♠ à ♠♠♠♠

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

   $u_0 = -1$ donc $u_1 = \sqrt{2-1} = 1$ puis $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ puis $u_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ et enfin $u_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

2. On considère la fonction f définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2+x}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $[-2;+\infty[$.

   $f = g\circ h$ avec $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = 2+x$. La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ puisqu'il s'agit d'une fonction affine. Pour $x \in [-2;+\infty[$ on a $h(x) \geq 0$ et la fonction g est continue sur $[0;+\infty[$ (puisqu'il s'agit de la fonction racine carrée). La composée de ces deux fonctions est donc continue sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-2;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

   La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, c'est pourquoi la fonction f n'est pas dérivable en -2, en revanche en tant que composée de deux fonctions dérivables f est dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \frac{(2+x)'}{2\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

   Pour tout $x > -2$ on a $2+x > 0$ donc $2\sqrt{2+x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   En effet $f(-2) = \sqrt{2-2} = 0$.
   De plus de $\lim\limits_{x\to+\infty} 2+x = +\infty$ et de $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ on déduit par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x} = +\infty$$

3. Montrer, par récurrence et en utilisant la fonction f que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et un majorant de (u_n).

   Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété définie au rang n par :

$$\mathscr{P}(n) : -1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

   – ***Initialisation*** : pour $n = 0$ puisque $u_0 = -1$ et $u_1 = 1$ on vérifie bien que :

$$-1 \leq -1 \leq 1 \leq 2$$

   La propriété $\mathscr{P}$ est vraie au rang 0.

   – ***Hérédité*** : Supposons que la propriété $\mathscr{P}$ soit vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
   On souhaite montrer que

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow -1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

Or :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq 2+u_n \leq 2+u_{n+1} \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{2+u_n} \leq \sqrt{2+u_{n+1}} \leq \sqrt{4}$$

c'est-à-dire :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$$

La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

– ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n=0$ et est héréditaire, par conséquent pour tout entier naturel n on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$$

On a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1}$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.
On a démontré que pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq 2$ autrement dit la suite (u_n) est majorée par 2.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ. Que peut-on préciser pour ce réel ℓ ?
(u_n) est majorée par 2 et est croissante, on en déduit qu'elle converge vers un réel ℓ inférieur ou égal à 2.

5. Justifier que $\ell = f(\ell)$ et déterminer ℓ.
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Puisque la fonction f est **continue** sur $[-2;+\infty[$ on a, par passage à la limite :

$$\ell = f(\ell) \Longleftrightarrow \ell = \sqrt{2+\ell} \Longleftrightarrow \ell^2 = 2+\ell \Longleftrightarrow \ell^2 - \ell - 2$$

$\Delta = 1+8 = 9$ d'où deux possibilités :

$$\ell_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad \text{ou} \ell_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Compte tenu du fait que la suite est croissante et que $u_1 = 1$ il est impossible que la limite soit -1 donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

6. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
ϵ est un nombre réel strictement positif.
$n = 0$ et $u = -1$.
Tant que $(|u-2| \geq \epsilon)$ **Faire**
  $n := n+1$ et $u := \sqrt{u+2}$
Fin Tant que
Afficher n

7. (a) Afin de découvrir l'affichage de cet algorithme pour $\epsilon = 0,1$, recopier et compléter le tableau des valeurs prises par les variables n, u et par $|u-2|$:

n	0	1	2	3
u	-1	1	$\simeq 1,7$	$\simeq 1,93$
$\lvert u-2\rvert$	3	1	$\simeq 0,3$	$\simeq 0,07$

Qu'affiche cet algorithme ?
Cet algorithme affiche donc $n=3$ puisque $|u_3 - 2| < 0,1$.

(b) Pourquoi est-on sûr qu'à partir d'un certain rang la condition $|u-2| \geq \epsilon$ ne sera pas vérifiée ?

On a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel on a $|u-2| < \epsilon$.

8. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$2-u_{n+1} = \frac{2-u_n}{\sqrt{2+u_n}+2}$$

$$2-u_{n+1} = 2-\sqrt{2+u_n} = \frac{(2-\sqrt{2+u_n})(2+\sqrt{2+u_n})}{2+\sqrt{2+u_n}} = \frac{4-(2+u_n)}{2+\sqrt{2+u_n}} = \frac{2-u_n}{\sqrt{2+u_n}+2}$$

(b) En justifiant que $1 \leq \sqrt{2+u_n}$ montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}+2} \leq \frac{1}{3}$

On sait que f est une fonction strictement croissante sur $[-2;+\infty[$, u est une suite minorée par -1 donc pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \geq -1 \Longleftrightarrow f(u_n) \geq f(-1) \Longrightarrow \sqrt{u_n+2} \geq 1$$

On a alors :

$$\sqrt{2+u_n} \geq 1 \Longleftrightarrow 2+\sqrt{2+u_n} \geq 3$$

Puis par passage à l'inverse on obtient :

$$\frac{1}{2+\sqrt{2+u_n}} \leq \frac{1}{3}$$

(c) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $2-u_{n+1} \leq \frac{1}{3} \times (2-u_n)$

Pour tout entier naturel n on a d'après la question précédente :

$$\frac{1}{2+\sqrt{2+u_n}} \leq \frac{1}{3}$$

De plus on sait que $u_n \leq 2 \Longleftrightarrow 2-u_n \geq 0$ d'où :

$$\frac{2-u_n}{2+\sqrt{2+u_n}} \leq \frac{2-u_n}{3}$$

c'est-à-dire :

$$2-u_{n+1} \leq \frac{2-u_n}{3}$$

(d) En déduire que : $2-u_6 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 (2-u_3)$

On applique l'inégalité précédente pour $n=5$ et on obtient :

$$2-u_6 \leq \frac{2-u_5}{3}$$

puis on applique cette inégalité pour $n=4$ d'où on tire :

$$2-u_6 \leq \frac{\frac{2-u_4}{3}}{3} \Longleftrightarrow 2-u_6 \leq \frac{2-u_4}{9}$$

puis on applique une dernière fois ce résultat pour $n=3$ et on obtient :

$$2-u_6 \leq \frac{2-u_3}{27} \Longleftrightarrow 2-u_6 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 (2-u_3)$$

(e) En déduire que pour $\epsilon = 0{,}01$, l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 6.

On sait d'après 7(a) que $2-u_3<0,1$ donc d'après la question précédente

$$2-u_6 \leq 0,1\times\frac{1}{27} \Longrightarrow 2-u_6<0,01$$

Par conséquent l'algorithme affichera une valeur de n inférieure ou égale à 6 pour $\epsilon=0,01$.

Exercice 2. ♠♠

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(1;-2;-1)$ et $B(3;-5;-2)$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
$\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ dirige la droite (AB), par conséquent :

$$M(x;y;z)\in(AB) \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-1=2t \\ y+2=-3t \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \\ z+1=-t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-3t-2 \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \\ z=-t-1 \end{cases}$$

2. Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-t' \\ y=1+2t' \quad \text{avec } t'\in\mathbb{R} \\ z=t' \end{cases}$
Démontrer que les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires.
(d) admet $\vec{u}(-1;2;1)$ comme vecteur directeur. Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ puisqu'il n'existe aucun réel t tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ par conséquent la droite (d) et la droite (AB) ne sont pas parallèles.
Cherchons s'il existe un couple de réel (t,t') vérifiant :

$$\begin{cases} 2t+1=2-t' \\ -3t-2=1+2t' \\ -t-1=t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2t+t'=1 \\ 3t+2t'=-3 \\ t'=-t-1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2t-t-1=1 \Rightarrow t-1=1 \Rightarrow t=2 \\ 3t-2t-2=-3 \Rightarrow t=-1 \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} t'\in\mathbb{R} \\ t'=-t-1 \end{cases}$$

Il est impossible d'avoir $t=-1$ et $t=2$, par conséquent le système précédent n'admet pas de solution. Les droites (AB) et (d) n'ont pas de point d'intersection. Elles sont donc non coplanaires.

3. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $C(0;-3;0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-5\\1\end{pmatrix}$

   (a) Donner une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$.

$$M(x;y;z)\in\mathscr{P} \Longleftrightarrow \exists t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad t'\in\mathbb{R}, \overrightarrow{CM}=t\vec{u}+t'\vec{v} \Longleftrightarrow \begin{cases} x-0=t+0t' \\ y+3=-4t-5t' \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} t'\in\mathbb{R} \\ z-0=0t+t' \end{cases}$$

Une représentation paramétrique du pl an $\mathscr{P}$ est alors :

$$\begin{cases} x=t \\ y=-4t-5t'-3 \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} t'\in\mathbb{R} \\ z=t' \end{cases}$$

(b) Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ contient la droite (AB).
Si $M(x;y;z) \in (AB)$ alors il existe un réel k tel que $x=2k+1$, $y=-3k-2$ et $z=-k-1$. Vérifions que ce point M est bien un point du plan $\mathscr{P}$.
On obtient :

$$\begin{cases} 2k+1=t \\ -3k-2=-4t-5t'-3 \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} t'\in\mathbb{R} \\ -k-1=t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=2k+1 \\ -3k-2=-4t-5t'-3 \quad \text{avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{et} t'\in\mathbb{R} \\ t'=-k-1 \end{cases}$$

Vérifions si la seconde égalité est satisfaite pour $t=2k+1$ et $t'=-k-1$. On a :

$$-4t-5t'-3=-4(2k+1)-5(-k-1)-3=-8k-4+5k+5-3=-3k-2$$

ce qui est vraie. Ainsi tout point M de (AB) est aussi un point du plan $\mathscr{P}$. La droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

4. On considère la sphère de diamètre [AB].

(a) Donner une équation de cette sphère.
Le centre I de cette sphère a pour coordonnées :

$$\mathrm{I}\left(\frac{1+3}{2};\frac{-2-5}{2};\frac{-1-2}{2}\right) \Longleftrightarrow \mathrm{I}\left(2;-\frac{7}{2};-\frac{3}{2}\right)$$

Le rayon de cette sphère mesure :

$$\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(3-1)^2+(-5+2)^2+(-2+1)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+9+1}}{2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Par conséquent, si on note $\mathscr{S}$ la sphère de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$ on a :

$$M(x;y;z)\in\mathscr{S} \Longleftrightarrow IM^2=\frac{AB^2}{4} \Longleftrightarrow (x-2)^2+(y+3,5)^2+(z+1,5)^2=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

(b) Déterminer le nombre de points d'intersection entre cette sphère et la droite (d)
Un point $M(x;y;z)$ appartient à l'intersection entre (d) et $\mathscr{S}$ si et seulement si il existe $t'\in\mathbb{R}$ tel que :

$$(2-t'-2)^2+(1+2t'+3,5)^2+(t'+1,5)^2=\frac{7}{2} \Longleftrightarrow t'^2+4t'^2+14t'+\frac{49}{4}+t'^2+3t'+\frac{9}{4}=\frac{7}{2}$$

Ce qui donne :

$$6t'^2+17t'+11=0$$

$\Delta=17^2-4\times11\times6=289-264>0$. On conclut que ce trinôme admet deux solutions. Par conséquent il existe deux points d'intersection entre $\mathscr{S}$ et (d).

Exercice 3. ♠♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$$

On souhaite résoudre l'équation (E) : $\sin x - \frac{x}{2} = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

1. Où l'on montre que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $[-2;2]$.
   (a) Montrer que si $x > 2$ alors $-\frac{x}{2} < -1$. En déduire que $f(x) \neq 0$ lorsque $x > 2$.
   Si $x > 2$ alors $-x < -2$ donc $-\frac{x}{2} < -1$. De plus pour tout réel x on a $\sin x \leq 1$. On en conclut que, lorsque $x > 2$:
   $$\sin x - \frac{x}{2} < 0$$
   Ainsi il n'est pas possible d'avoir $f(x) = 0$ pour $x > 2$.
   (b) Montrer que si $x < -2$ alors $-\frac{x}{2} > 1$ et en déduire de nouveau que $f(x) \neq 0$ pour $x < -2$.
   Si $x < -2$ alors $-x > 2$ donc $-\frac{x}{2} > 1$. De plus pour tout réel x on a $\sin x \geq -1$. On en conclut que, lorsque $x < -2$:
   $$\sin x - \frac{x}{2} > 0$$
   Ainsi il n'est pas possible d'avoir $f(x) = 0$ pour $x < -2$.
   (c) En déduire que toutes les solutions de l'équation (E) se trouvent dans l'intervalle $[-2;2]$.
   D'après les deux premières questions pour tout réel x non compris dans l'intervalle $[-2;2]$ on a $f(x) \neq 0$, par conséquent toutes les solutions de l'équation (E) se trouvent dans l'intervalle $[-2;2]$.
2. Où l'on étudie la fonction f.
   (a) Résoudre, à l'aide d'un cercle trigonométrique, l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.
   $$\cos x = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} \qquad x \in [-\pi;\pi]$$
   (b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in [-\pi;\pi]$.
   f est dérivable sur $[-\pi;\pi]$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $[-\pi;\pi]$ et on a pour tout $x \in [-\pi;\pi]$:
   $$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2}$$
   (c) En déduire le tableau de variations de f pour $x \in [-\pi;\pi]$.
   On utilise un cercle trigonométrique pour déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$+\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

3. Où l'on conclut.
   (a) Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).
   En tant que somme de deux fonctions continues sur $[-2;2]$ (la fonction sin et une fonction affine) la fonction f est continue sur $[-2;2]$. De plus sur $\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{3};+\frac{\pi}{3}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ la fonction f est strictement monotone passant du négatif au positif (ou inversement), d'après un corollaire du TVI l'équation $f(x) = 0$ admet exactement 3 solutions sur l'intervalle $[-2;2]$.

(b) Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.
La plus grande des solutions est comprise entre $\dfrac{\pi}{3}$ et π. Elle vaut à 10^{-3} près :

$$\alpha \simeq 1,895$$