CORRECTION DU BAC BLANC

Exercice 1. **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

On considère l'équation :

$$(E) : z^3+6z^2+12z+9=0$$

1. Démontrer que $z^3+6z^2+12z+9=(z+3)(z^2+3z+3)$

   Pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a :

$$(z+3)(z^2+3z+3)=z^3+3z^2+3z+3z^2+9z+9=z^3+6z^2+12z+9$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

   $(z+3)(z^2+3z+3)=0 \Longleftrightarrow z+3=0 \quad \text{ou} \quad z^2+3z+3=0.$

   D'où $z_1=-3$ ou $\Delta=9-12=-3<0$ donc deux autres racines complexes conjugués :

$$z_2=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ou} \qquad z_3=\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Au final :

$$\mathscr{S}=\left\{-3;-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Partie B

On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B=\overline{z_A} \text{ et } z_C=-3.$$

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle. $|z_A|=\sqrt{9/4+3/4}=\sqrt{3}$. De plus $|z_B|=|\overline{z_A}|=\sqrt{3}$ et $|z_C|=|-3|=3$. Enfin un argument de z_A vérifie :

$$\cos\theta=\frac{-3/2}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

   On en déduit que $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

   Ainsi :

$$z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

   Et donc

$$z_B=\overline{z_A}=\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

   Et enfin $z_C=-3=3e^{i\pi}$.

2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

$$AB=|z_B-z_A|=|-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}|=|-i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$$

   De même :

$$AC=|z_C-z_A|=|-3+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}|=|z_B|=\sqrt{3}$$

Et enfin :

$$BC = |z_C - z_B| = |-3 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}| = |z_A| = \sqrt{3}$$

AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.

Partie C

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.
On note O$'$, A$'$, B$'$ et C$'$ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. (a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$.

Notons que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ par conséquent :

$$z_{A'} = \frac{1}{3}iz_A^2 = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \frac{3}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

De la même manière on trouve que :

$$z'_B = \frac{1}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Et enfin :

$$z_{C'} = \frac{1}{3}i(-3)^2 = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

(b) Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$.

(c) Démontrer l'alignement des points O, A et B$'$ ainsi que celui des points O, B et A$'$.

$$z_{\overrightarrow{OB'}} = z_{B'} - z_O = z_{B'} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

On observe que

$$z_{\overrightarrow{OA}} = \sqrt{3}z_{\overrightarrow{OB'}} \iff \overrightarrow{OA} = \sqrt{3} \times \overrightarrow{OB'}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires donc les points O, A et B$'$ sont alignés.
De même :

$$z_{\overrightarrow{OB}} = z_B - z_O = z_B = \overline{z_A} = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$z_{\overrightarrow{OA'}} = z_{A'} - z_O = z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Et donc

$$z_{\overrightarrow{OA'}} = -\sqrt{3}z_{\overrightarrow{OB}} \iff \overrightarrow{OA'} = -\sqrt{3} \times \overrightarrow{OB}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires donc les points O, A$'$ et B sont alignés.

2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M$'$ appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

Si M appartient à la droite (AB) alors il existe un réel k tel que

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \iff z_{\overrightarrow{AM}} = k \times z_{\overrightarrow{AB}} \iff z_M - z_A = k(z_B - z_A) \iff z_M = k \times \left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + z_A$$

Ce qui donne :

$$z_{\mathrm{M}} = k \times \sqrt{3}i + z_{\mathrm{A}}$$

Par conséquent

$$z_{\mathrm{M}'} = \frac{1}{3}i\,(z_{\mathrm{M}})^2 = \frac{1}{3}i\left(k \times \sqrt{3}i + z_{\mathrm{A}}\right)^2 = \frac{1}{3}i\left(-3k^2 + 2k\sqrt{3}i\,z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}}^2\right)$$

Ce qui donne :

$$z_{\mathrm{M}'} = -k^2 i - \frac{2\sqrt{3}k}{3} z_{\mathrm{A}} + \frac{1}{3} i z_{\mathrm{A}}^2 = -k^2 i - \frac{2\sqrt{3}k}{3} z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{A}'}$$

c'est-à-dire :

$$z_{\mathrm{M}'} = -k^2 i - \frac{2\sqrt{3}k}{3}\left(-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

puis :

$$z_{\mathrm{M}'} = -k^2 i + \sqrt{3}k - ki + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}k + i\left(-k^2 - k + \frac{1}{2}\right)$$

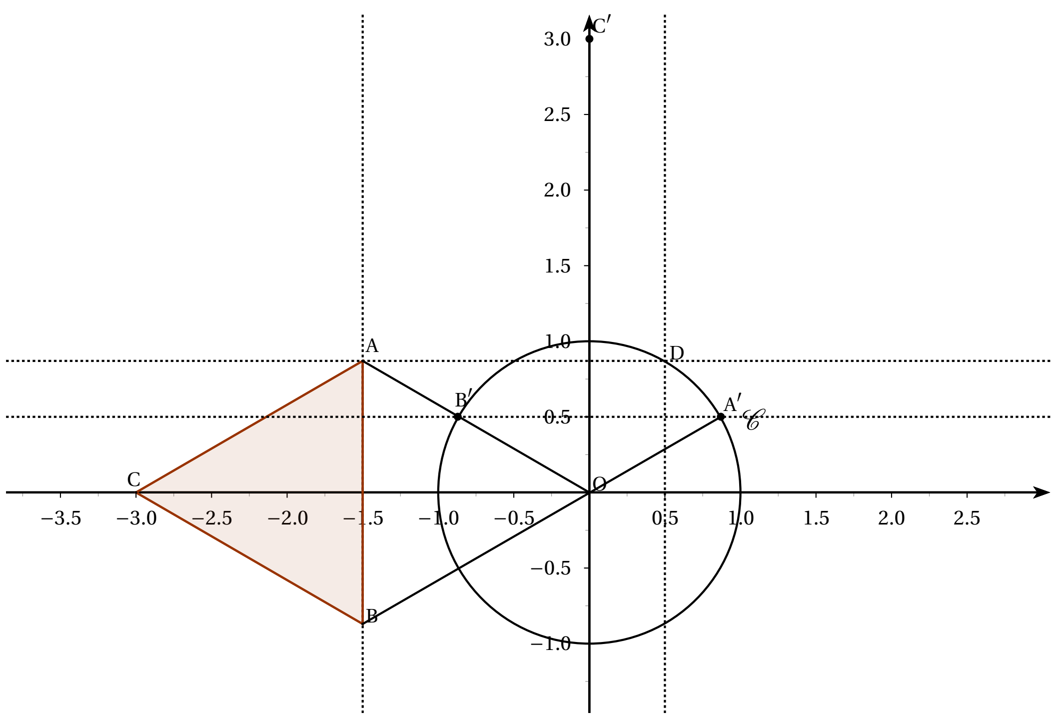
On obtient donc $\Re\mathrm{e}(z_{\mathrm{M}'}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}k$ et $\Im\mathrm{m}(z_{\mathrm{M}'}) = -k^2 - k + \dfrac{1}{2}$, Il faut encore vérifier que

$$-\frac{1}{3}\Re\mathrm{e}(z_{\mathrm{M}'})^2 + \frac{3}{4} = \Im\mathrm{m}(z_{\mathrm{M}'})$$

On a :

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}k\right)^2 + \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} + 3k^2 + 3k\right) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} - k^2 - k + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - k^2 - k = \Im\mathrm{m}(z_{\mathrm{M}'})$$

Par conséquent le point M' appartient à la parabole d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}$.



Exercice 2. **5 points**

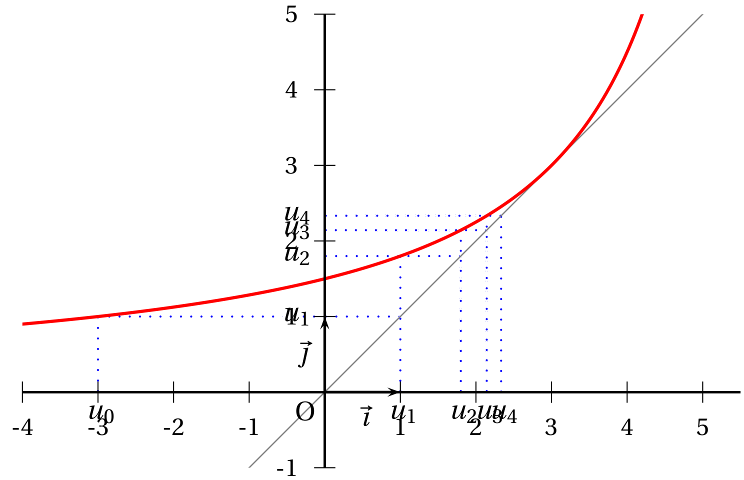
On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 & = & -3 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0(u_0\,;\,0)$, $M_1(u_1\,;\,0)$, $M_2(u_2\,;\,0)$, $M_3(u_3\,;\,0)$ et $M_4(u_4\,;\,0)$.



Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

Il semble que la suite(u_n) soit strictement croissante et converge vers 3.

2. (a) Démontrer que si $x < 3$ alors $\frac{9}{6-x} < 3$. Si $x > 3$ alors $-x > -3$ et donc $6 - x > 6 - 3$ c'est-à-dire $6 - x > 3$. Par passage à l'inverse on obtient :

$$\frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{9}{6-x} < \frac{9}{3} = 3$$

En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n.

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $u_n < 3$ et montrons la par récurrence.

– ***Initialisation*** : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = -3 < 3$.

– ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n < 3$ alors $u_{n+1} < 3$.
D'après la question précédente si $x < 3$ on a $f(x) < 3$, appliquons ce résultat pour $x = u_n$ et on obtient puisque $u_n < 3$:

$$f(u_n) < 3 \Longleftrightarrow u_{n+1} < 3$$

– ***Conclusion*** : La propriété $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n < 3$$

(b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{9 - u_n(6-u_n)}{6-u_n} = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6-u_n} = \frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$$

Puisque $u_n < 3 \Longrightarrow (u_n - 3)^2 > 0$. De plus puisque $u_n < 3 \Longrightarrow -u_n > -3 \Longrightarrow 6 - u_n > 3 > 0$ autrement dit :

$$\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n} > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

(c) Que peut-on déduire des questions 2.(a) et 2.(b) ?

On a démontré que la suite (u_n) est majorée par 3 (question 2.(a)) et strictement croissante (question 2.(b)), par conséquent (u_n) converge vers un réel $\ell \leq 3$.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - v_n = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{9-18+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{-9+3u_n} - \frac{3}{3u_n-9}$$

ce qui donne au final :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n-3}{3u_n-9} = \frac{3-u_n}{-3(3-u_n)} = -\frac{1}{3}$$

Par conséquent la suite (v_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

(b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

Puisque (v_n) est arithmétique on a pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 + nr = \frac{1}{u_0-3} - \frac{1}{3}n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n$$

Par conséquent pour tout entier naturel n on a :

$$v_n = \frac{1}{u_n-3} \Longleftrightarrow u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \Longleftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 3$$

Et donc on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3$$

(c) Calculer la limite de la suite (u_n).

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3}n = -\infty$ par conséquent on a par quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n} = 0$$

Et au final :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{-\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3 = 3 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 3$$

(d) On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, U est un nombre réel
Initialisation	U prend la valeur -3
	J prend la valeur 0
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $\mathrm{U} < 3 - 10^{-\mathrm{K}}$
	U prend la valeur $\dfrac{9}{6-\mathrm{U}}$
	J prend la valeur J + 1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

i. Qu'affiche l'algorithme si l'utilisateur entre K = 0 ?

Si l'utilisateur rentre K = 0 alors $3-10^{-0} = 3-1 = 2$. Puisque $\mathrm{U} = -3$ on « entre » dans le tant que.

$\mathrm{U} = \dfrac{9}{6+3} = 1$ et J = 1. Puisque $\mathrm{U} = 1 < 2$ on recommence.

$\mathrm{U} = \dfrac{9}{6-1} = \dfrac{9}{5} = 1{,}8$ et J = 2. Puisque $\mathrm{U} = 1{,}8 < 2$ on recommence.

$\mathrm{U} = \dfrac{9}{6-9/5} = \dfrac{9}{21/5} = \dfrac{45}{21} > 2$ et J = 3. Puisque $\mathrm{U} > 2$ on sort du tant que et l'algorithme affiche J = 3.

ii. À quoi correspond l'affichage final J ? J est le premier rang à partir duquel $u_{\mathrm{J}} \geq 3 - 10^{-\mathrm{K}}$.

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Quelque soit la valeur de K, puisque (u_n) est croissante et convergente vers 3 il existe un entier n_0 tel que $3 - 10^{-\mathrm{K}} \leq u_{n_0} < 3$. Par conséquent l'algorithme s'arrête.

Exercice 3. **5 points**

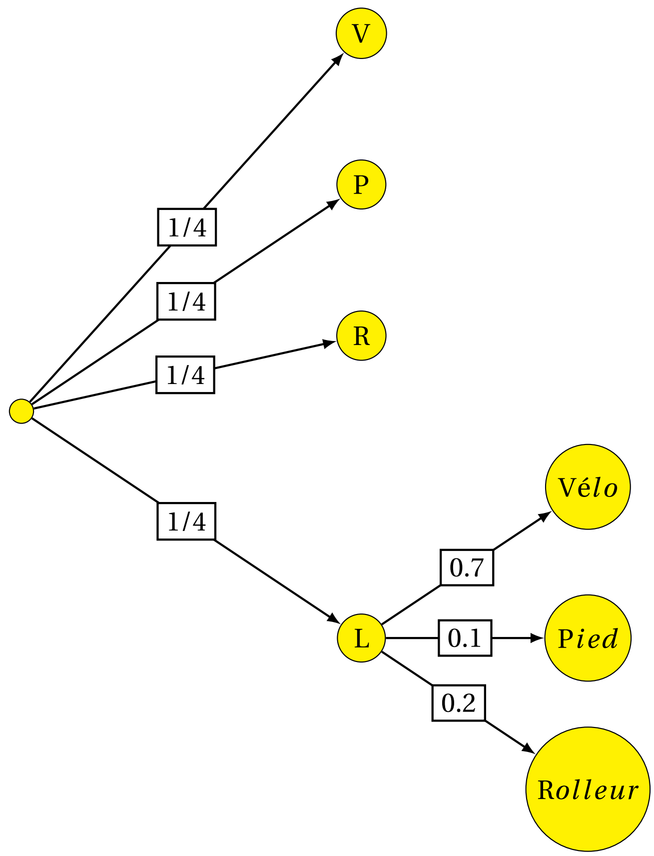
Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :

- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas et il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.



Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Vérifier que la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet en vélo est 0,425.

   En notant V cet événement on obtient :

$$p(\mathrm{V}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{70}{100} = \frac{170}{400} = \frac{85}{200} = \frac{42,5}{100} = 0,425$$

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

$$p_{\mathrm{V}}(\mathrm{L}) = \frac{p(\mathrm{L} \cap \mathrm{V})}{p(\mathrm{V})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{70}{100}}{\frac{170}{400}} = \frac{70}{170} = \frac{7}{17}$$

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.
L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\frac{2}{3}$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'épreuves remportées par un concurrent « cycliste » lors des six prochaines années.

   (a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ? En déduire $p(X = 2)$.

   On répète 6 fois la même épreuve de Bernoulli (identique et indépendante) admettant 2/3 pour probabilité de succès, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{2}{3}$ ce que l'on résume ainsi :

$$X \hookrightarrow B(6; 2/3)$$

$$p(X=2) = \binom{2}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 15 \times \frac{4}{3^6} = \frac{20}{3^5} = \frac{20}{243}$$

   (b) Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « cycliste ».

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \frac{1}{3^6} = \frac{3^6-1}{3^6} = \frac{728}{729}$$

   (c) Calculer E(X), interpréter.

   Puisque $X \hookrightarrow B(6; 2/3)$ on a $E(X) = 6 \times \frac{2}{3} = 4$.
   Si l'on répète un grand nombre de fois ces 6 épreuves de Bernoulli on peut espérer observer une moyenne de 4 succès cyclistes (pour 6 épreuve donc).

Exercice 4. **5 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$donné en annexe.

PARTIE A. **Restitution Organisée de Connaissances**

On suppose connus les résultats suivants :

Propriété 1 : *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$, *si pour tout réel* $x \geq x_0$ *on a* $h(x) \leq k(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Propriété 2 : $x \longmapsto e^x$ *est l'unique fonction égale à sa dérivée qui vaut* 1 *en* 0 *c'est-à-dire* $(e^x)' = e^x$ *et* $e^0 = 1$.

Propriété 3 : *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

   g est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$g'(x) = e^x - 1$$

   La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x > 0$ on a $e^x > e^0 \iff e^x > 1 \iff e^x - 1 > 0 \iff g'(x) > 0$.

   On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

2. Justifier que pour tout x, $\left(e^x - x\right)$ est strictement positif.

   Des variations de la fonction g on déduit que g admet un minium atteint pour $x = 0$ qui vaut :

   $$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

   Par conséquent pour tout réel x on a :

   $$g(x) \geq 0 \iff e^x - x - 1 \geq 0 \iff e^x - x \geq 1 \implies e^x - x > 0$$

3. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

   On a pour tout réel x :

   $$e^x - x > 0 \iff e^x > x$$

   Par comparaison, de $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ on tire :

   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

PARTIE B. **Etude de la fonction f.**

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. En $+\infty$ nous avons besoin de modifier l'écriture de $f(x)$ pour calculer sa limite, et pour tout $x \neq 0$ on a :

   $$f(x) = \frac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$$

   D'après le cours on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} - 1 = +\infty$.

Puisque $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$ on conclut par composition que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

En $-\infty$ on a $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = -1$ et on conclut par quotient que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

(b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ (il s'agit de l'axe des abscisses) et puisque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ en $-\infty$

2. (a) Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{e^x - x - x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

(b) Étudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations.

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$ puisque $e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$ pour tout réel x.

On en déduit immédiatement que :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$1/(e-1)$	$\searrow$	0

3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Cette équation est du type

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = f'(0)x + f(0)$$

Or, $f'(0) = \frac{e^0}{(e^0 - 0)^2} = \frac{1}{1} = 1$ et $f(0) = \frac{0}{e^0 - 0} = 0$ d'où l'équation de T :

$$\text{T} : y = x$$

(b) i. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) - x = -\frac{xg(x)}{e^x - x}$$

Pour tout réel x on a :

$$f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x} = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(-1 + e^x - x)}{e^x - x} = -\frac{xg(x)}{e^x - x}$$

ii. En déduire le signe de $f(x) - x$ en fonction de x puis en déduire le position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T.

Etablissons le tableau de signe de $f(x)-x$, qui est du signe de $-xg(x)$ puisque $e^x - x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

On a donc $f(x)-x>0$ pour $x<0$ c'est-à-dire $f(x)>x$ pour $x<0$. On en déduit que sur $]-\infty;0[$ $\mathscr{C}$ est au dessus de T. Les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse 0 (normal pour la tangente...) et sur $]0;+\infty[$ la tangente T est au dessus de $\mathscr{C}$.

4. Tracer la droite T et les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique donné en annexe.