∾ CORRECTION BAC BLANC 1 ∾
EXPO - PROBA - SUITES - ESPACE - ARITHMÃĽTIQUE

Tout élève traitera au moins un exercice.

Exercice 1. PARTIE A. **ROC**

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$g'(x) = e^x - x$$

Puisque $e^x > x$ on en déduit que $g'(x) > 0$ (ce qui est plus fort que $g'(x) \geq 0$).

2. $g' > 0$ donc g est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier pour tout réel $x > 0$ on a :

$$g(x) > g(0) = e^0 - 0/2 = 1 \Longrightarrow g(x) > 0 \Longrightarrow e^x > \frac{x^2}{2}$$

ce qui en divisant par $x > 0$ implique :

$$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

Enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc par comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

3. On a

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-xe^x} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$$

ce qui permet de conclure que :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

PARTIE B. **Etude d'une première fonction**

1. Sur $[0;+\infty[$, $x \geq 0$ évidemment et $\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} > 0$ puisque pour tout réel X on sait que $e^X > 0$. Par produit on en déduit que :

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall x \geq 0$$

2. On a $f(x) = \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}\right)$. En posant $X = -\frac{x}{2}$ on trouve que

$$f(X) = -\frac{1}{2}Xe^X$$

Lorsque $x \to +\infty$ alors $X \to -\infty$ et d'après le 3. de la partie A on a :

$$\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0 \Longrightarrow \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{2}Xe^X = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

3. Sur $[0;+\infty[$ f est une fonction fort sympathique et parfaitement dérivable et de dérivée :
Rq : On utilise la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ et $(e^u)' = u'e^u$. En particulier $\left(e^{\frac{-x}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{4}e^{-\dfrac{x}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

Cette dérivée est du signe de $1 - \frac{1}{2}x$ puisque $\frac{1}{4}e^{-\dfrac{x}{2}} > 0$. Enfin $1 - \frac{1}{2}x > 0 \Longleftrightarrow x < 2$ d'où :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,5e^{-1}$	$\searrow$	0

PARTIE C. **Etude d'une deuxième fonction**

1. F étant la somme et la composée de fonctions élémentaires toutes parfaitement dérivable sur $\mathbb{R}$ elle l'est par force dérivable sur $\mathbb{R}$, et plus particulièrement sur $[0;+\infty[$. De plus :

$$\mathrm{F}'(x) = 0 + \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} - \frac{x}{4}e^{-\frac{-x}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{-x}{2}} = \frac{x}{4}e^{-\frac{-x}{2}} = f(x)$$

2. Dans un premier temps $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{\frac{-x}{2}} = 1$ puis en posant $\mathrm{X} = -\dfrac{x}{2}$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2}e^{-\frac{-x}{2}} = \lim_{\mathrm{X}\to-\infty} \mathrm{X}e^{\mathrm{X}} = 0$$

Par somme on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 1$$

On sait d'après la partie B que $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $\mathrm{F}'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ ce qui donne :

x	0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	
$\mathrm{F}(x)$	0	$\nearrow$	1

3. F est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et continue (puisque dérivable) sur ce même intervalle à valeurs dans l'intervalle $[0;1[$. Puisque $0,5 \in [0;1[$, on en déduit d'après un corollaire souvent utilisé du TVI que l'équation $\mathrm{F}(x) = 0,5$ admet une unique solution α qui vaut environ :

$$\alpha \simeq 3,36$$

Exercice 2. PARTIE A. **expérience 1**

1. Le vaillant lecteur pourra s'aider d'un arbre qu'il effectuera luri-même pour mieux comprendre ce corrigé. Notons B l'événement :« le cube tirée est bleu » et L l'événement « le cube tiré est marqué d'un losange ». On a alors :

$$p(\mathrm{L}) = p(\mathrm{L}\cap\mathrm{B}) + p(\mathrm{L}\cap\overline{\mathrm{B}}) = 0,6\times 0,2 + 0,4\times x = 0,12 + 0,4x$$

2. La probabilité que le cube tiré soit marqué d'une étoile est :

$$0,6\times 0,4 + 0,4\times(1-0,2-x) = 0,24 + 0,32 - 0,4x = 0,56 - 0,4x$$

On cherche x pour que :

$$0,56 - 0,4x = 0,12 + 0,4x \iff 0,8x = 0,44 \iff x = \frac{44}{80} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

3. On a $p(\mathrm{B}) = 0,6$ et $p(\mathrm{L}) = 0,12 + 0,4x$ puis $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{L}) = 0,12$.
   B et L sont indépendants si et seulement si on a $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{L}) = p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{L})$ ce qui donne :

$$0,12 = 0,6(0,12 + 0,4x) \Longleftrightarrow 0,2 = 0,12 + 0,4x \Longleftrightarrow x = \frac{0,08}{0,4} = 0,2$$

4. On cherche $p_{\mathrm{L}}(\mathrm{B})$ qui vaut :

$$p_{\mathrm{L}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{L})}{p(\mathrm{L})} = \frac{0,12}{0,12 + 0,4 \times 0,5} = \frac{0,12}{0,32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$

PARTIE B. **expérience 2**

1. On effectue 3 tirages identiques et indépendants. X compte le nombre de cubes rouges parmi les 3 cubes obtenus, or $p(\overline{\mathrm{B}}) = 0,4$, donc X suit une loi binomiale de paramètre 3 et 0,4.
2. Sans utiliser la formule de la loi binomiale, en imaginant simplement l'arbre on obtient

$$p(\mathrm{X} = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2$$

3.

$$p(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0,6^3$$

4.

$$p(\mathrm{X} = 0) + p(\mathrm{X} = 3) = 0,6^3 + 0,4^3$$

Exercice 3. PARTIE A.

1. $\mathrm{M}(x; y; z) \in (\mathrm{IJ}) \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{\mathrm{IM}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$. Or, $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-1; \frac{1}{3}; 1\right)$ d'où :

$$\left\{\begin{array}{l} x - 1 = -t \\ y - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Un vecteur directeur de (KL) est $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(a - \frac{3}{4}; 1; -1\right)$ et le point de coordonnée $\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ est le point K donc un point de (KL) par conséquent immédiatement (d'après le cours bien sûr) on trouve que la droite (KL) admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y - = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right. \quad t' \in \mathbb{R}$$

3. Premièrement les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(a - \frac{3}{4}; 1; -1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-1; \frac{1}{3}; 1\right)$ ne sont pas colinéaires, en effet pour passer de l'ordonnée du premier à l'ordonnée du deuxième on multiplie par $\frac{1}{3}$ et on multiplie par -1 pour passer des côtes de l'un au côte de l'autre. Par conséquent les droites (IJ) et (KL) sont sécantes ou non coplanaires, par conséquent

le système suivant :

$$\begin{cases} -t+1 = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ \dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

admet exactement un couple solution (dans le cas où les droites sont sécantes) ou aucune solution dans le cas où les droites ne sont pas coplanaires. On résout les deux dernières équations :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t+1 = 3t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - t' - 3t' = -1 \\ t = 1 - t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t' = 0,5 \\ t = 0,5 \end{cases}$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le système admet une unique solution si et seulement si $t = t' = 0,5$. Ainsi on trouve :

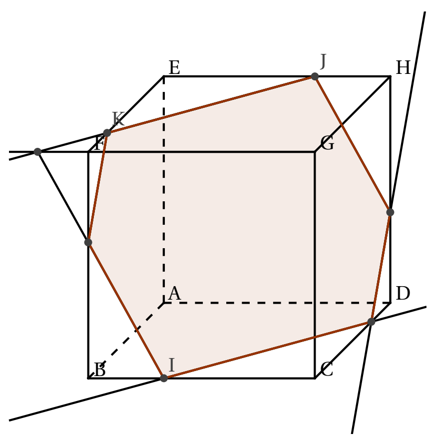
$$\frac{3}{4} + 0,5\left(a - \frac{3}{4}\right) = -0,5 + 1 \Longleftrightarrow 0,5a - 3/8 = -0,25 \Longleftrightarrow a - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Par conséquent les droites sont sécantes si et seulement si $a = \dfrac{1}{4}$.

PARTIE B.

1. $\overrightarrow{IL}\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{2}{3};0\right)$ et $\overrightarrow{KJ}\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{2}{3};0\right)$ donc

$$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ} \Longleftrightarrow \text{IKJL est un parallélogramme}$$

2. 

Exercice 4.

1.

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	$\simeq 6,964$	6,5	$\sqrt{97/2} \simeq 6,964$
2	$\simeq 6,732$	$\simeq 6,736$	$\simeq 6,734$	$\simeq 6,734$

2. (a) Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $u_n > 0$ et $v_n > 0$:
   - ***Initialisation*** : $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. donc la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
   - ***Hérédité*** : Montrons l'implication :

$$u_n > 0 \quad \text{et} \quad v_n > 0 \Longrightarrow u_{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} > 0$$

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et puisqu'on suppose $u_n > 0$ et $v_n > 0$, à l'évidence on a :

$$u_{n+1} > 0$$

De plus $u_n^2 > 0$ et $v_n^2 > 0$ donc $\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0$ et donc $v_{n+1} > 0$.
La propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire.

– ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

(b) Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n}{4} = \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - u_n^2 - v_n^2 - 2u_n v_n}{4} = \frac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{4}$$

ce qui donne enfin :

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2$$

On en déduit que

$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0 \Longrightarrow v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2$$

et puisque les deux suites sont positives on en déduit que :

$$v_{n+1} \geq u_{n+1}$$

et ceci pour tout entier naturel n, de plus $v_0 = b > u_0 = a$ donc pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \leq v_n$$

3. (a) Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

or, $v_n \geq u_n \Longleftrightarrow v_n - u_n \geq 0$ on en conclut donc que :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante.

(b) Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n^2 - v_n^2}{2}$$

Enfin puisque $u_n \leq v_n$ on a $u_n^2 \leq v_n^2$ par conséquent :

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 \leq 0 \Longleftrightarrow v_{n+1}^2 \leq v_n^2$$

Et comme $v_n > 0$ quelque soit l'entier n on en déduit que :

$$v_{n+1} \leq v_n$$

ce qui prouve que (v_n) est une suite décroissante.

4. (v_n) est une suite décroissante et minorée par 0 donc (v_n) converge.
De plus pour tout entier naturel n $v_n < v_0$ et donc $u_n \leq v_n < v_0$, par conséquent (u_n) est majorée par v_0 c'est-à-dire par b en plus d'être une suite croissante donc (u_n) converge.

Exercice 5.

1. (a) $N_1 = 11 \times 12^2 + 1 \times 12 + 10 = 1606$, N_1 s'écrit en base 10 :

$$1606$$

(b) i. Pour $a = 7$, $b = 10$ et $c = 3$ on a :

$$144 \times 7 + 12 \times 10 + 3 = 1131$$

ii. Par conséquent $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}$

(c) i.

$$N = a_n 12^n + a_{n-1} 12^{n-1} + \cdots + a_1 \times 12 + a_0$$

Puisque $3|12$, $3|12^n$ pour tout entier naturel n non nul et donc

$$N - a_0 = 12\left(a_n 12^{n-1} + \cdots + a_1\right) = 3 \times 4\left(a_n 12^{n-1} + \cdots + a_1\right)$$

$N - a_0$ est donc un multiple de 3 donc :

$$N - a_0 \equiv 0[3] \Longrightarrow N \equiv a_0[3]$$

N est divisible par 3 si et seulement si il se termine par 0, 3, 6 ou 9.

ii. N_2 se termine par $c = 3$ en base 12 donc N_2 est divisible par 3. Effectivement $1 + 1 + 3 + 1 = 6 = 3 \times 2$ confirme bien que 1131 est un multiple de 3.

(d) i.

$$12 \equiv 1[11] \Longrightarrow 12^n \equiv 1^n[11]$$

Par conséquent pour tout entier naturel n on a :

$$a_n 12^n \equiv a_n[11]$$

Et donc :

$$N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0[11]$$

Un nombre en base 12 est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 11.

ii. La somme des chiffres de N_1 est $11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11$ donc N_1 est divisible par 11. On a vu que $N_1 = 1606$ et $1606 = 11 \times 146$, confirmation que N_1 est un multiple de 11.

(e) N est divisble par 3 si $y = 0$ ou $y = 3$ ou $y = 6$ ou $y = 9$.
Si de plus il est divisible par 11 alors $x + 4 + y$ est un multiple de 11.
Dans le cas où $y = 0$ il faut que $x + 4$ soit un multiple de 11, possible si $x = 7$.
Dans le cas où $y = 3$ il faut que $x + 7$ soit un multiple de 11, possible si $x = 4$.
Dans le cas où $y = 6$ il faut que $x + 10$ soit un multiple de 11, possible si $x = 1$.
Dans le cas où $y = 9$ il faut que $x + 13$ soit un multiple de 11, possible si $x = 9$. Ainsi l'ensemble de toutes les solutions est le suivant :

$$\mathscr{S} = \{\overline{740}^{12}; \overline{443}^{12}; \overline{146}^{12}; \overline{949}^{12}\}$$