BACCALAUREAT GENERAL ROSE

SESSION 2014

**MATHEMATIQUES-NON SPECIALISTE**

Série : **S**

DUREE DE L'EPREUVE : **4 Heures**. COEFFICIENT : **7**.

**Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.**

L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Il est invité à faire sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Maths

Terminale Scientifique

# Sujet Bac Gris

TS3
OBLIGATOIRE

*Lycée Jean Durand, Castelnaudary (Aude, France métropolitaine)*

**Exercice 1.** (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et $C(-2\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   (b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et de rayon $r = 3$.
   (a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
   (b) Étudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

**Exercice 2.** (5 points)

En Syldavie s'organise pour l'été 2014 le grand championnat (GC) de danse sous marine en scaphandre d'au moins 150 kg. Compte tenu de l'importance de la compétition, organisée tous les 4 ans, de nombreuses industries fleurissent et prospèrent. En particulier, la compagnie S, est une entreprise spécialisée dans la fabrication de scaphandre. Pour être homologué par le comité organisateur du GC, les scaphandres doivent avoir une masse d'au moins 145 kg.

La masse d'un scaphandre fabriqué par la machine de la compagnie S peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 150$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

**PARTIE A.**

*On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.*

| $x$ | 135 | 140 | 145 | 150 | 155 | 160 | 165 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X \leq x)$ | 0,016 | 0,077 | 0,238 | 0,5 | 0,762 | 0,923 | 0,984 |

1. Calculer $p(135 \leq X \leq 165)$.
2. Calculer la probabilité $p$ pour qu'un scaphandre choisi au hasard dans la production de la compagnie S soit homologué par le comité organisateur du GC.
3. La compagnie S trouve cette probabilité $p$ trop faible. Elle décide alors de modifier ses méthodes de production sans faire varier l'espérance $\mu$ mais en modifiant l'écart-type $\sigma$ afin que la probabilité $p \simeq 0,95$.
   (a) Montrer que $\sigma$ doit vérifier :
   $$p\left(\frac{X-150}{\sigma} \leq -\frac{5}{\sigma}\right) = 0,05$$
   (b) En utilisant le résultat suivant : *lorsque* $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *alors* $p(Z \leq -1,645) \simeq 0,05$, déterminer une valeur approchée de $\sigma$.

**PARTIE B.**

La machine de la compagnie S a été modifiée afin que la probabilité $p$ de fabriquer un scaphandre homologué soit égale à 0,95.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 500 scaphandres fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 de la proportion de scaphandre homologué dans un échantillon de taille 500.
2. Parmi les 500 scaphandres de l'échantillon, 460 sont homologables par le comité organisateur du GC.
   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question précédente, la compagnie S peut-elle estimer que sa nouvelle machine fonctionne comme prévu ?

**PARTIE C.**

Le comité organisateur du GC utilise une machine pour vérifier la conformité des scaphandres utilisés par les compétiteurs (elle doit vérifier le poids, mais encore d'autres critères complexes que nous évoquerons pas ici). Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette machine est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

1. Le tournoi dure 30 jours, déterminer la valeur approchée au millième de $\lambda$ afin que $p(T \geq 30) = 0,97$.
   Dans la suite on prendra $\lambda = 0,001$.
2. Quelle est la probabilité que la machine fonctionne encore sans dérèglement après 50 jours sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement après 20 jours ?
3. Quelle est l'espérance de T ?
4. Déterminer $j$ tel que $p(T \geq j) = 0,5$. Interpréter.

**Exercice 3.** (6 points)

**PARTIE A.**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}.$$

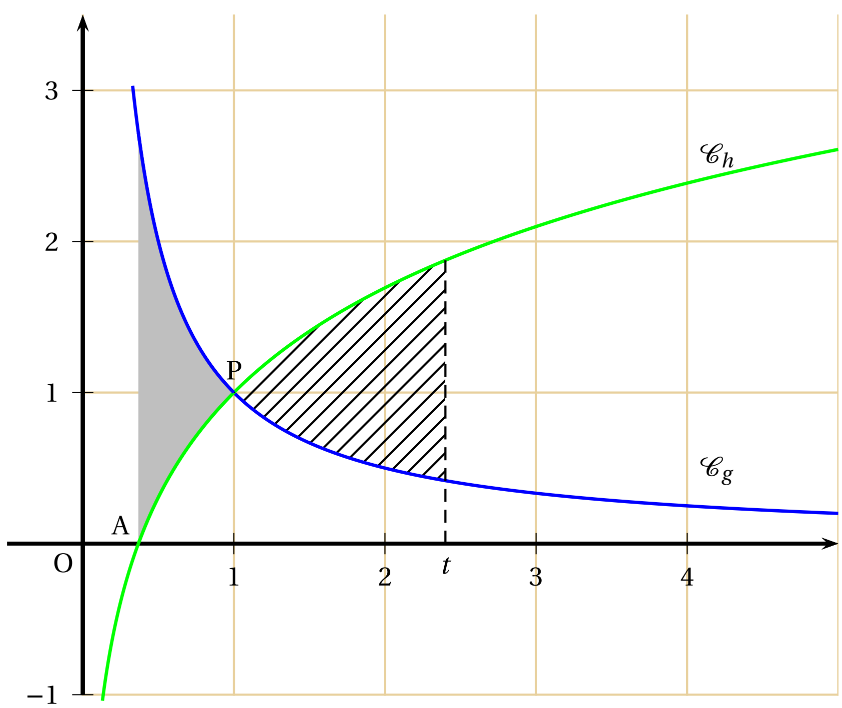
1. Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Calculer $f(1)$ puis en déduire le signe de $f(x)$ lorsque $x$ décrit l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par
   $\mathrm{F}(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction $f$ sur cet intervalle.
5. Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que l'équation $\mathrm{F}(x) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ qu'on note $\alpha$.
7. Donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$.

**PARTIE B.**

Soit $g$ et $h$ les fonctions définies sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions $g$ et $h$.




1. A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.
2. P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1\,;\,1)$.

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$ (domaine grisé sur le graphique).
   (a) Montrer que $\mathscr{A} = \displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} -f(x)dx$.
   (b) En déduire que $\mathscr{A} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Soit $t$ un nombre réel de l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).
   On souhaite déterminer une valeur de $t$ telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.
   (b) Conclure.

**Exercice 4.** (4.5 points)

*Pour chacune des questions, quatre propositions sont données dont une seule est exacte. Indiquer, sans justification, pour chaque question la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte* $0,75$ *point. Une réponse fausse enlève* $0,25$ *point et l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. En cas de total négatif la note est ramenée à* $0$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1,1u_n$.

On considère l'algorithme suivant :

**Algorithme 1 :**

**Données:** $n$ est un entier naturel.
A est un nombre entier. $u$ désigne un nombre réel.
**Traitement :**
Saisir la valeur de A
$n = 0$
$u = 1$
**Tant que** ($u \leq$ A) **Faire**
    $u$ prend la valeur $1,1 \times u$.
    $n$ prend la valeur $n + 1$.
**Fin Tant que**
Afficher $n$.

1. L'algorithme précédent permet :
   **A.** d'afficher les valeurs de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$
   **B.** d'afficher la valeur $u_{\mathrm{A}}$.
   **C.** d'afficher la plus petite valeur de $n$ telle que $u_n >$ A.
   **D.** d'afficher les valeurs de $n$ telles que $u_n >$ A.
2. Lorsque l'utilisateur entre A = 100 l'algorithme affiche :

   **A.** $n = 25$ **B.** $n \geq 49$ **C.** $u \simeq 106.7$ **D.** $n = 49$

3. Parmi les 4 affirmations suivante laquelle est exacte :
   **A.** Si une suite est croissante et majorée par A alors sa limite en $+\infty$ vaut nécessairement A.
   **B.** Si $f$ est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ alors la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \int_{-n}^{n} f(x)dx$ est nécessairement nulle (c'est-à-dire $u_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$).
   **C.** Si une suite est strictement décroissante alors sa limite en $-\infty$ vaut $-\infty$.
   **D.** Si $f$ est une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$ alors la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \int_{-n}^{n} f(x)dx$ est nécessairement nulle (c'est-à-dire $u_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$).

   Soit A le point du plan complexe d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1 - i$ et B le point du plan complexe d'affixe $z_{\mathrm{B}} = 2 - 2\sqrt{3}i$.
4. L'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $z$ vérifiant $|z_{\mathrm{M}} - 1 + i| = \left|z_{\mathrm{M}} - 2 + 2\sqrt{3}i\right|$ est :
   **A.** le cercle de centre A et de rayon AB.
   **B.** la médiatrice du segment [AB].
   **C.** l'axe des ordonnées.
   **D.** la droite (AB).
5. On a :
   **A.** $|z_{\mathrm{A}}| = 1$ **et** $|z_{\mathrm{B}}| = 4$.
   **B.** $arg(z_{\mathrm{A}}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ **et** $z_{\mathrm{B}} = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   **C.** $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **et** $arg(z_{\mathrm{B}}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   **D.** $z_{\mathrm{A}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **et** $z_{\mathrm{B}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
6. Un argument du nombre complexe $\frac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$ vaut
   **A.** $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{-\pi}{12}$. **C.** $\frac{7\pi}{12}$. **D.** $\frac{-7\pi}{12}$.