Sujet et corrigé de l'épreuve de Mathématiques - Métropole

Fonctions - Suites d'intégrales

Exercice 1.

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par $\mathcal{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que $\mathcal{C}_1$ passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

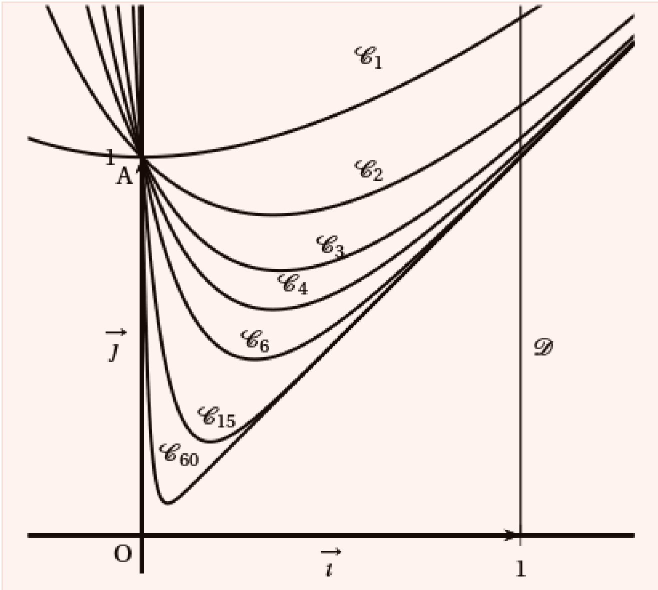
L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \left(x + \mathrm{e}^{-nx}\right) \mathrm{d}x.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$, pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + \mathrm{e}^{-nx}.$$

   Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



(a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

(b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(n+1)x}\left(1 - \mathrm{e}^x\right)\,\mathrm{d}x.$$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

Solution de l'exercice 1.

Partie A

1. $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 0 + 1 = 1$ donc le point de coordonnées $(0;1)$ appartient à $\mathscr{C}_1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_1'(x) = 1 - e^{-x}$$

Or, $1 - e^{-x} > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff \ln 1 > \ln e^{-x} \iff 0 > -x \iff x > 0$.
Ainsi $f_1'(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$ d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

De plus :

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} x + e^{-x} = +\infty$$

Enfin, $f_1(x) = x + e^{-x} = x + \frac{1}{e^x} = \frac{xe^x + 1}{e^x}$. Or, d'après le cours $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X} = +\infty$$

Partie B

1. (a) Comme $f_n(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[0;1]$, I_n désigne l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   (b) Compte tenu du fait qu'il semble que $\mathscr{C}_{n+1}$ soit au dessous de $\mathscr{C}_n$ sur $[0;1]$ il suit que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ semble décroissante ; de plus puisque $f_n(x) = x + e^{-nx} \geq x$ il suit que :

   $$I_n \geq \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

   La suite (I_n) est donc minorée par $\frac{1}{2}$ puis semble décroissante, on peut donc conjecturer qu'elle est convergente vers un réel supérieur à $\frac{1}{2}$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right) dx - \int_0^1 \left(x + e^{-nx}\right) dx = \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right) - \left(x + e^{-nx}\right) dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x} - e^{-nx} dx$$

Enfin on a $e^{-(n+1)x}(1 - e^x) = e^{-(n+1)x} - e^{-(n+1)x+x} = e^{-(n+1)x} - e^{-nx-x+x} = e^{-(n+1)x} - e^{-nx}$ et donc, pour tout $n \geq 1$ il suit que :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x) dx$$

De plus pour tout réel $x \in [0;1]$ et pour tout $n \geq 1$ on a $e^{-(n+1)x} > 0$ donc est du signe de $1 - e^x$.

Or, $0 \leq x \leq 1 \iff e^0 \leq e^x \leq e \iff 1 \leq e^x \leq e \iff -e \leq -e^x \leq -1 \iff 1 - e \leq 1 - e^x \leq 0$.
On vient donc de démontrer que, pour $x \in [0;1]$ et pour $n \geq 1$:

$$1 - e^x \leq 0 \Longrightarrow e^{-(n+1)x}(1 - e^x) \leq 0 \Longrightarrow \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x) dx \leq 0 \Longrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Longrightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est donc décroissante. On a déjà prouver qu'elle était minorée par $\frac{1}{2}$ ainsi il suit que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers un réel $\ell \geq \frac{1}{2}$.

3. Pour $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{n} e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} e^{-n} - \left(0 - \frac{1}{n} e^0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$$

Puis il suit que $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty]} 1 - e^{-n} = 1$ et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2} + 0 \times 1 = \frac{1}{2}$$

Probabilité (conditionnelle et loi normale)

Exercice 2. Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

   On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'évènement « le test est positif ».

   (a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

   (b) Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

   (c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

   Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

   À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaine de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

   (a) Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

   (b) Déterminer l'entier positif h tel que $P(900 - h \leqslant X \leqslant 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

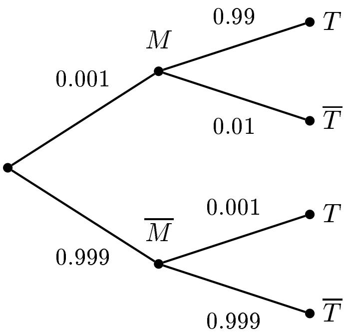
2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97% de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

   Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

   Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

Solution de l'exercice 2.

Partie A



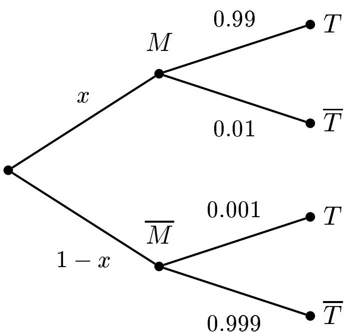
1. (a)

   (b)
$$p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) = 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001 = 0,001989$$

   (c)
$$p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,001 \times 0,99}{0,001989} \simeq 0,498$$

   En effet si le test est positif, il y a un peu moins d'une chance sur deux que la personne soit malade.

2. On cherche x tel que $p_T(M) \geq 0,95$ sachant que $p(M) = x$; pour cela utilisons l'arbre suivant :



   Puis on obtient :

$$p_T(M) \geq 0,95 \Longleftrightarrow \frac{p(M \cap T)}{p(T)} \geq 0,95 \Longleftrightarrow \frac{0,99x}{0,99x + (1-x) \times 0,001} \geq 0,95 \Longleftrightarrow \frac{0,99x}{0,989x + 0,001} \geq 0,95$$

   ce qui équivaut à :

$$0,99x \geq 0,95 \times (0,989x + 0,001) \Longleftrightarrow 0,99x - 0,93955x \geq 0,00095 \Longleftrightarrow x \geq \frac{0,00095}{0,05045} \simeq 0,019$$

   Pour une proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie de plus de 2% la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95

Partie B

1. (a) D'après la calculatrice :
$$p(890 \leq X \leq 920) \simeq 0,92$$

(b) Notons $Z=\dfrac{X-900}{7}$, on a alors $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$; de plus :

$$p(900-h \leq X \leq 900+h) \simeq 0,99 \Longleftrightarrow p\left(-\frac{h}{7} \leq Z \leq \frac{h}{7}\right) \simeq 0,99$$

Compte tenu de la symétrie de la courbe de Gauss par rapport à l'axe des ordonnées il suit que $p(Z \leq 0)=0,5$ et que $p\left(-\frac{h}{7} \leq Z \leq \frac{h}{7}\right)=2p\left(0 \leq Z \leq \frac{h}{7}\right)=2p\left(Z \leq \frac{h}{7}\right)-2p(Z \leq 0)=$ $2p\left(Z \leq \frac{h}{7}\right)-1$

Ainsi h doit vérifier :

$$2p\left(Z \leq \frac{h}{7}\right)-1 \simeq 0,99 \Longleftrightarrow p\left(Z \leq \frac{h}{7}\right) \simeq \frac{1,99}{2}$$

D'après la calculatrice $\dfrac{h}{7} \simeq 2,57583 \Longrightarrow h \simeq 18$

2. Ici $n=1000$ et $p=0,97$. Les trois conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont vérifiées, les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique aux seuil $0,95$ sont :

$$0,97-1,96 \times \frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}} \simeq 0,959 \qquad \text{et} \qquad 0,97+1,96 \times \frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}} \simeq 0,981$$

Or, la fréquence de comprimés non conformes vaut $\dfrac{1000-53}{1000}=0,947$ et n'est pas comprise entre $0,959$ et $0,981$ comme attendu dans 95% des cas, il est donc raisonnable de remettre en question les réglages faits par le laboratoire.

Complexes

Exercice 3. On désigne par (E) l'équation

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.
2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\dfrac{\pi}{3}$.
   Calculer a^2 sous forme algébrique.
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.
3. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in R$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - \mathrm{i}y$.
   Démontrer que :
   — Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
   — Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.

Solution de l'exercice 3.

1. $$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 16 = -48$$

   L'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$ admet donc deux solutions complexes conjugués qui sont :

   $$Z_1 = \frac{-4 + i\sqrt{48}}{4} = -2 + 2i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{-4 - i\sqrt{48}}{4} = -2 - 2i\sqrt{3}$$

   De plus $|Z_1| = \sqrt{4 + 4 \times 3} = 4$, et si on note $\theta = arg(Z_1)$ alors on obtient :

   $$\cos\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   On en déduit que $\theta = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ et par conséquent :

   $$Z_1 = 4e^{2i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \overline{Z_1} = \overline{4e^{2i\frac{\pi}{3}}} = 4e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

2. Puisque $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ il suit que :

   $$a^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2i\sqrt{3}$$

Par conséquent a est solution de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
Par conséquent on obtient $z^2 = a^2 \Longleftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow (z-a)(z+a) = 0 \Longleftrightarrow z - a = 0 \quad \text{ou} \quad z + a = 0 \Longleftrightarrow z = a \quad \text{ou} \quad z = -a$
Les solutions de l'équations $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ sont les nombres complexes $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}+\pi} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

3. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors

$$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 - y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

Par conséquent :

$$\overline{z_1z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

et de plus :

$$\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 - y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 - i(y_1x_2 + x_1y_2) = \overline{z_1z_2}$$

Montrons la deuxième propriété par récurrence.
— ***Initialisation*** : Pour $n = 1$ on a :
$$\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$$
— ***Hérédité*** : Montrons que
$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n \Longrightarrow \overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$$
En appliquant le premier point du R.O.C on a :
$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$$
La propriété étant héréditaire et initialisée à partir de $n = 1$ on a pour tout $n \geq 1$:
$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n$$

4. Si z est solution de (E) alors $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$.
En appliquant les propriétés du conjugué on obtient :

$$\overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0} \Longrightarrow \overline{z^4} + 4\overline{z^2} + 16 = 0 \Longrightarrow \overline{z}^4 + 4\overline{z}^2 + 16 = 0$$

ce qui montre que $\overline{z}$ est solution de (E).
En posant $Z = z^2$ l'équation (E) devient :

$$Z^2 + 4Z + 16 = 0$$

qui admet d'après la première question deux solutions $Z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $Z_2 = -2 - 2i\sqrt{3}$
Pour résoudre l'équation (E) on est donc amené à résoudre $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z^2 = -2 - 2i\sqrt{3}$. La première équation admet d'après la question 2 deux solutions $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.
D'après la question 3 les conjugués de ces deux solutions sont encore solutions de (E) c'est-à-dire les nombres complexes $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ sont solutions de (E) ce qui porte à 4 le nombre de solutions de l'équation (E), par conséquent on connaît toutes les solutions de (E) qui sont :

$$\mathscr{S} = \left\{2e^{i\frac{\pi}{3}}; 2e^{-i\frac{\pi}{3}}; 2e^{i\frac{4\pi}{3}}; 2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

Espace (Tétraèdre)

Exercice 4. Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
   (a) Donner les coordonnées des points D et F.
   (b) Donner une représentation para métrique de la droite (DF).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
   (d) Calculer les coordonnées du point H.
   (e) Démontrer que l'angle $\widehat{\mathrm{EHG}}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{\mathrm{D}M} = t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{E}M\mathrm{G}}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
   (a) Démontrer que $M\mathrm{E}^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
   (b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
   En déduire que $M\mathrm{E}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
   (c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
   En déduire que α est maximale si et seulement si $M\mathrm{E}^2$ est minimal.
   (d) Conclure.

Solution de l'exercice 4.

1. (a) Le point $D(0;0;1)$, F est le milieu du segment $[BC]$ et $B(1;0;0)$ et $C(0;1;0)$ par conséquent :

$$F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$$

   (b) Le point $M(x;y;z) \in (DF)$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$.
   Or, $\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-1\right)$ et $\overrightarrow{DM}(x;y;z-1)$ ainsi une représentation paramétrique de (DF) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = -t+1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

   (c) Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ passe par A, ainsi $M(x;y;z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$
   ce qui donne :

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0$$

Ainsi une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est par exemple :

$$x+y-2z=0$$

(d) Les coordonnées de H vérifient simultanément les équations de (DF) et de $\mathscr{P}$ donc :

$$\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t+2t-2=0 \Longleftrightarrow 3t-2=0 \Longleftrightarrow t=\frac{2}{3}$$

On en déduit que

$$H\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3};\frac{1}{2}\times\frac{2}{3};-\frac{2}{3}+1\right) \Longleftrightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$

(e) $\widehat{EHG}$ est droit si et seulement si $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=0$
En tant que milieu de $[AB]$, E a pour coordonnées $E(0.5;0;0)$ et de même $G(0;0.5;0)$ par conséquent $\overrightarrow{HE}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{HE}\left(\frac{1}{6};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ et de la même manière $\overrightarrow{HG}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{6};-\frac{1}{3}\right)$; ainsi :

$$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=-\frac{1}{18}-\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=0$$

Par conséquent l'angle $\widehat{EHG}$ est droit.

2. (a) $M\in(DF)$ avec $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DF}$ donc $M\left(\frac{1}{2}t;\frac{1}{2}t;-t+1\right)$ ainsi $\overrightarrow{ME}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t;-\frac{1}{2}t;t-1\right)$ donc

$$ME^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2=0,25-\frac{1}{2}t+0,25t^2+0,25t^2+t^2-2t+1=1,5t^2-2,5t1,25$$

(b) $\overrightarrow{MG}\left(-\frac{1}{2}t;\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t;t-1\right)$ donc

$$MG^2=\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2=0,25-\frac{1}{2}t+0,25t^2+0,25t^2+t^2-2t+1=1,5t^2-2,5t+1,25=ME^2$$

Ainsi $ME=MG$ ce qui prouve que MEG est isocèle en M.
Dans le triangle MEG isocèle en M, considérons la hauteur issue de M et notons Z le pied de cette hauteur alors :

$$\sin\alpha/2=\frac{EZ}{ME}$$

Or $EZ=EG/2$ et $EG=\sqrt{0.25+0.25+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

d'où :

$\sin\alpha/2=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{ME} \Longleftrightarrow ME\sin\alpha/2=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(c) α désigne la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$ donc $\alpha\in]0;\pi[$, ainsi $\frac{\alpha}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
α est maximal si et seulement si $\frac{\alpha}{2}$ est maximal. Le sinus étant croissant sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ il suit que α est maximal si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
Enfin puisque $ME\sin\alpha/2=\frac{1}{2\sqrt{2}} \Longleftrightarrow ME=\frac{1}{2\sqrt{2}\sin(\alpha/2)}$, $\sin(\alpha/2)$ est maximal si et seulement si ME est minimal.

(d) Notons f la fonction qui à tout réel t associe le réel $ME^2 = 1,5t^2 - 2,5t1,25$.
Maximiser α revient à minimiser f.
$f'(t) = 3t - 2,5$ et $f'(t) = 0 \Longleftrightarrow 3t - 2,5 = 0 \Longleftrightarrow t = \dfrac{2,5}{3} = \dfrac{5}{6}$.
Dressons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

t	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

On vient de démontrer que ME est minimal lorsque $t = \dfrac{5}{6}$ c'est-à-dire α est maximal lorsque $t = \dfrac{5}{6}$ c'est-à-dire l'angle $\widehat{EMG}$ lorsque M a pour coordonnées :

$$M\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{6}; \frac{1}{2} \times \frac{5}{6}; -\frac{5}{6} + 1\right)$$

(spé) - Matrice

Exercice 5. Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

— il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;

— la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A.
Par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années.
En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.
2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   (a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.
   (b) Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$. En déduire que pour tout entier naturel $n, Z_{n+1} = 2Z_n$.
   (b) On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que pour tout entier naturel n,
   $$Y_{2n} = 2^n Z_0.$$
   En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$a_{2n} = 600 \times 2^n - 400 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400.$$
4. Le bassin A a une capacité limitée à 10000 poissons.
   (a) On donne l'algorithme suivant.

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement :	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
Sortie :	Afficher a.

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

(b) Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

Solution de l'exercice 5.

1. On note que $a_{n+1} = 2b_n + 200$ et $b_{n+1} = a_n + 100$ ainsi on trouve que :

$$a_1 = 2b_0 + 200 = 400 \qquad \text{et} \qquad b_1 = a_0 + 100 = 300$$

puis de même :

$$a_2 = 2b_1 + 200 = 600 + 200 = 800 \qquad \text{et} \qquad b_2 = a_1 + 100 = 500$$

2. (a)

$$AX_n + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 \\ a_n + 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 200 \\ x + 100 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2(x + 100) + 200 \\ y = x + 100 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -400 \\ y = -300 \end{cases}$$

(c)

$$Ay_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 600 \\ a_n + 400 \end{pmatrix}$$

et

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} + 400 \\ b_{n+1} + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 200 + 400 \\ a_n + 100 + 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_n + 600 \\ a_n + 400 \end{pmatrix}$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$Z_{n+1} = Y_{2(n+1)} = Y_{2n+2} = AY_{2n+1} = A \times AY_{2n} = A^2 Y_{2n}$$

Or,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$$

Et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$Z_{n+1} = 2I_2 Y_{2n} = 2Y_{2n}$$

(b) De $Y_{2n} = 2^n Y_0$. on déduit que :

$$Y_{2n+1} = AY_{2n} = A \times 2^n Y_0 = 2^n AY_0 = 2^n Y_1$$

Or, $Y_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \end{pmatrix}$. $Y_{2n} = 2^n Y_0 \iff \begin{pmatrix} a_{2n} + 400 \\ b_{2n} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$ d'où

$$a_{2n} + 400 = 2^n \times 600 \iff a_{2n} = 2^n \times 600 - 400$$

Puis comme $Y_{2n+1} = 2^n Y_1 \iff \begin{pmatrix} a_{2n+1} + 400 \\ b_{2n+1} + 300 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \end{pmatrix}$ d'où :

$$a_{2n+1} + 400 = 2^n \times 800 \iff a_{2n+1} = 2^n \times 800 - 400$$

4. (a) Cet algorithme affiche le nombre de poisson que contient le bassin A au bout de p années compte tenu des résultats de la question précédent (en effet si p est pair alors il existe un entier naturel n tel que $p = 2n$ et sinon $p = 2n + 1$.)

(b)

Variables :	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation :	$p = 0$ et $a = 0$
Traitement :	Tant que $a \leq 10000$ faire
	Si p est pair
	Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$
	Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$.
	Sinon
	Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$
	Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$.
	Fin de Si.
	Affecter à p la valeur $p + 1$
	Fin du tant Que
Sortie :	Afficher $p - 2$.

Dans le cas présent l'algorithme renvoie la valeur 8 c'est-à-dire que le pisciculteur peut utilise le bassin A durant 8 ans de la manière indiqué par l'énoncé.

Voici une version codé à l'aide de Python :

```
def bac():
    p=0
    a=0
    while a<=10000:
        if p%2==0:
            n=p/2
            a=600*2**n-400
        else:
            n=(p-1)/2
            a=800*2**n-400
        print(a,p)
        p+=1
    return p-2

print(bac())
```

qui affiche donc :

```
200.0 0
400.0 1
800.0 2
1200.0 3
2000.0 4
2800.0 5
4400.0 6
6000.0 7
9200.0 8
12400.0 9
8
>>>
```