EXERCICES
MÊME LE PLAN EST COMPLEXE !

I) Considérations géométriques basiques

Exercice 1 : Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

1. $\text{Re}(z) = 2$ (en bleu)
2. $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$ (en rouge)
3. $\text{Re}(z) = 2\text{Im}(z) - 1$ (en vert)
4. $\text{Im}(z) = (\text{Re}(z))^2$ (en noir)

Exercice 2 : Soit $(\text{O}; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer et représenter l'ensemble des points $\text{M}(a; b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a + b + i(b^2 - 1)$ soit :

1. un réel
2. un imaginaire pur
3. nul

Exercice 3 : On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_\text{A} = \frac{3}{2}i$, $z_\text{B} = 2+\frac{1}{2}i$, $z_\text{C} = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_\text{D} = -1-\frac{1}{2}i$.

1. Placer les points sur un graphique puis déterminer l'affixe du milieu I du segment [AC].
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}$. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer l'affixe du point E symétrique de A par rapport à B.

Exercice 4 : La plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(\text{O}; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

1. Placer **à la règle et au compas** les points A, B et C d'affixes respectives $2 - i$; $2i$ et $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. Déterminer les affixes des points A′ et B′ symétriques de A et B par rapport à O
3. Déterminer l'affixe du symétrique C′ de C par rapport à l'axe réel, puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{CC}'}$

II) Module et argument

Exercice 5 :

1. Pour tout nombre complexe z on pose $\quad \text{P}(z) = z^3 - 3z^3 + 3z + 7$
   - **a.** Calculer $\text{P}(-1)$.
   - **b.** Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait $\quad \text{P}(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$
   - **c.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{P}(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.
   On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives :

   $z_\text{A} = -1 \qquad z_\text{B} = 2 + i\sqrt{3} \qquad z_\text{C} = \overline{z_\text{B}} \qquad z_\text{D} = 3$

3.
   - **a.** Réaliser une figure.
   - **b.** Calculer les distance AB, BC et CA. En déduire la nature du triangle ABC.
   - **c.** Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{CA}}$ et $\overrightarrow{\text{CD}}$.
   - **d.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{CA}}.\overrightarrow{\text{CD}}$. En déduire la nature du triangle ADC.

Exercice 6 : Soit A le point situé sur le cercle de centre O et de rayon 2 d'ordonnée 1.

1. Faire une figure et par considération géométrique, déterminer l'affixe z_A de A.
2. Tracer l'ensemble des points M(z) tels que

   a. $\arg(z) = \arg(z_A) \quad [2\pi]$ (en vert)
   b. $\arg(z) = \arg(-z_A) \quad [2\pi]$ (en rouge)
   c. $\arg(z) = \arg(\overline{z_A}) \quad [2\pi]$ (en noir)
   d. $\arg(z) = \arg(iz_A) \quad [2\pi]$ (en bleu)
   e. $\arg(z) = \arg(z_A) \quad [\pi]$ (en pointillés verts)
   f. $\arg(z) = \arg(z_A) + \arg(\overline{z_A}) \quad [2\pi]$ (en pointillés rouges)
   g. $|z| = |2z_A|$ (en pointillés noirs)

Exercice 7 : Déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition donnée :

1. $M \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow |z-2-i| = 1$
2. $M \in \mathscr{F} \Longleftrightarrow |z| = |\overline{z}-2+i|$
3. $M \in \mathscr{G} \Longleftrightarrow \arg(z+2i) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
4. $M \in \mathscr{H} \Longleftrightarrow |z-3| = |z-3i|$
5. $M \in \mathscr{K} \Longleftrightarrow |\overline{z}-4+i| = 1$
6. $M \in \mathscr{L} \Longleftrightarrow \arg(\overline{z}) = \arg(-z)[2\pi]$

III) Forme trigonométrique et exponentielle

Exercice 8 :

1. Déterminer le module et un argument de $z = \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
2. Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z' = -1+2i$.
3. Placer alors dans le plan complexe les deux points A(z) et B(z').

Exercice 9 : Déterminer une forme trigonométrique de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

Exercice 10 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$

1. Soit A et B les points d'affixes $z_A = 1-i$ et $z_B = 3+i$
   a. Calculer les affixes des points A′ et B′, images des points A et B par f.
   b. On suppose que deux points ont la même image par f.
   Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
   a. Démontrer que OMIM′ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2-3z+3 = 0$
   b. Résoudre l'équation $z^2-3z+3 = 0$
3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$.
   En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$, puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.
   b. On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que tous les points M du cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M′ sur un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_E = -4-3i$. Donner la forme trigonométrique z_E+4 et à l'aide du 3)(a) démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

Exercice 11 : Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants : $z_1 = -\sqrt{3}+i$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z_1^2$

Exercice 12 : Dans le plan complexe, placer les points $A\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$, $B\left(-e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$, $C(-z_A \times z_B)$ et $D\left(-\dfrac{z_B}{z_A}\right)$

Exercice 13 : Déterminer les formes algébriques de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ **2.** $z_2 = 2-i+3e^{i\pi}$ **3.** $z_3 = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 14 : Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{6} \qquad z_2 = 2-2i \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.
Les écrire alors sous forme exponentielle.

b. En déduire le module et l'argument de Z.

c. Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

3. Dans le plan complexe d'unité graphique 2 cm, placer dans l'ordre les points $B(z_2)$, $A(z_1)$ et $C(Z)$ à la règle et au compas.

4. Ecrire sous forme algébrique le nombre Z^{2014}.

Exercice 15 : On considère le nombre complexe $z = 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique

2. Déterminer le module et un argument de z^2

3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z.

4. Déduire de ce qui précède $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ puis $\sin\dfrac{\pi}{12}$

5. Comparer avec les valeurs trouvées à l'exercice précédent.

IV) Interprétation graphique du module et de l'argument

Exercice 16 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -i$.
On appelle C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral direct, ie tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = +\dfrac{\pi}{3}$.
Placer le point C à la règle et au compas, puis déterminer son affixe exacte par le calcul.

Exercice 17 : On considère les points A, B, C, D, S et T d'affixes respectives :

$$a=-2+4i \qquad b=-4+2i \qquad c=4+2i \qquad d=-2+2i+6e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad s=5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad t=-2+2i$$

1. Placer ces points et compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Pour chacune des questions suivantes, expliquer la méthode pour y répondre (mais il est inutile d'y répondre)
   a. Montrer que les points A, B C et D sont cocycliques.
   b. Montrer que la droite (ST) est la médiatrice du segment [AB]
   c. On considère les points P et Q, milieux respectifs des segments [AC] et [BD].
   Déterminer p et q les affixes respectives des points P et Q.
3. On a calculé $\dfrac{t-p}{q-s}=-\dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{d-c}{b-a}=3$ Que peut-on en déduire ?
4. Que représente le point T pour le triangle PQS ? Le démontrer. *On donne* $p=1+3i$ *et* $t=-3-i$.
5. Déterminer l'affixe r du point R tel que ABSR soit un parallélogramme.

Exercice 18 : Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier votre choix.
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct.

1. Soit z une nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$. **Proposition :** z^{100} est un nombre réel
2. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z|=|1-z|$.
   Proposition : $\mathscr{F}$ est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. On considère l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe $z=1-2e^{i\alpha}$ avec $\alpha\in[0;\pi]$
   Proposition : $\mathscr{G}$ est inclus dans un cercle de rayon 2.
4. Avec les mêmes notations qu'au 3. **Proposition :** Le point A$(1+2i)$ est un point de $\mathscr{G}$
5. On donne l'équation (E) suivante : $z^2-2z\cos\dfrac{\pi}{7}+1=0$
   Proposition : (E) admet deux solutions complexes de modules égaux à 1.

Exercice 19 : On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{I}}=1$, $a=2i$ et $b=3+i$.

1. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
2. Calculer l'affixe c du point C image de A par la symétrie de centre I.
3. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{c-b}{a-b}$
   En déduire le module et un argument de ce nombre ; ainsi qu'une interprétation géométrique.
4. Soit D le point d'affixe d telle que $d-c=a-b$, montrer que ABCD est un carré.
5. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{MC}}+\overrightarrow{\text{MD}}$
   a. Exprimer $\vec{u}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\text{MI}}$
   b. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $||\vec{u}||=2||\overrightarrow{\text{AB}}||$.
   Construire Γ.

V) Annales

Exercice 20 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. **Pondichery -2013**

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   - **a.** Déterminer la forme algébrique de z_M.
   - **b.** Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.
   - **c.** Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique. Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.
   - **a.** Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   - **b.** Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.
   - **c.** Écrire les coordonnées des points I, B et M′.
   - **d.** Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.
   - **e.** Montrer que BM′ = 2OI.

Exercice 21 : **Extrait - Métropole 2013**

Pour chacune des deux propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Proposition 1 :** Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.
2. **Proposition 2 :** Le nombre complexe $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.
3. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + i| = |z - i|$.
   - **a.** $\mathscr{E}$ est l'axe des abscisses.
   - **b.** $\mathscr{E}$ est l'axe des ordonnées.
   - **c.** $\mathscr{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.
4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   - **a.** Le triangle OBC est isocèle en O.
   - **b.** Les points O, B, C sont alignés.
   - **c.** Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

Exercice 22 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. **Nouvelle Calédonie 2013**

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. **Proposition** : Pour tout entier naturel n : $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z - 4)\left(z^2 - 4z + 8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
   Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3. **Proposition** : Pour tout nombre réel α, $1+e^{2i\alpha}=2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_A=\frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

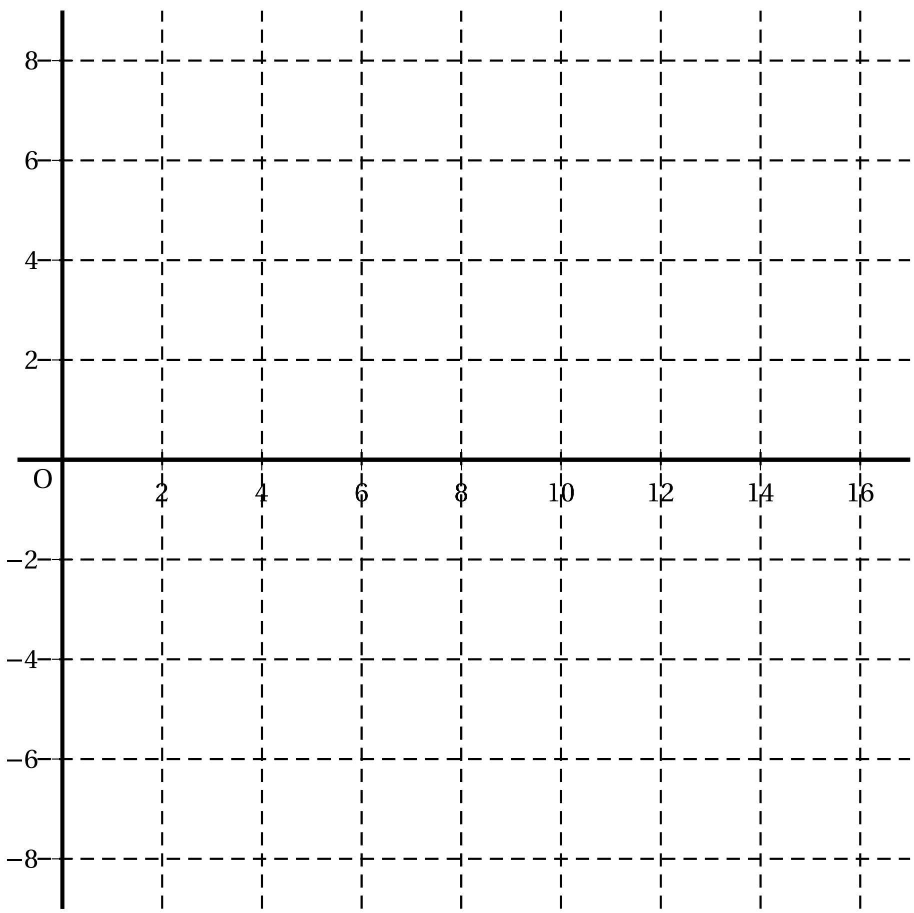
   Proposition : $1+j+j^2=0$.

Exercice 23 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. **Amérique du sud -2013**

On considère l'équation (E) : $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   - **a.** Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   - **b.** Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   - **c.** Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée en annexe et tracer, sur la figure donnée en annexe, les segments $[M_1,M_2]$, $[M_2,M_3]$ et $[M_3,M_4]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}\right)$.
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1}=2^n\sqrt{3}$.
5. On note $\ell_n=M_1M_2+M_2M_3+\cdots+M_nM_{n+1}$.
   - **a.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell_n=2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$.
   - **b.** Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell_n \geqslant 1000$.



Exercice 24 : **Polynésie 2013**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\dfrac{z_1}{z_2}$ est :

(a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ (b) $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ (c) $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ (d) $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a. une solution

b. deux solutions

c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ 5\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 0\ ;\ 4)$. La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

(a) $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ (d) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point $D(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3\ ;\ -5\ ;\ 1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

b. La droite Δ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et n'a pas de point commun avec le plan $\mathscr{P}$.

c. La droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

d. La droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 25 : (Antilles-Guyanne 2013)

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 + i$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables : A et B des nombres réels
K et N des nombres entiers
Initialisation : Affecter à A la valeur 1
Affecter à B la valeur 1
Traitement :
Entrer la valeur de N
Pour K variant de 1 à N
Affecter à A la valeur $\dfrac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
Affecter à B la valeur $\dfrac{B}{3}$
FinPour
Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de (b_n).
3. **a.** On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' :

$$\left|z+z'\right| \leqslant |z|+\left|z'\right| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}| \leqslant \frac{2|z_n|}{3}.$$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.