Exercices
Continuité

Exercice 1 : Montrer que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x)=\begin{cases}\cos(x) & \text{si } x\in[0;1]\\ \cos(x-1) & \text{si } x\in]1;2]\end{cases}$ est discontinue en un réel.

Exercice 2 : Pour chaque cas, préciser si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & \text{si} \quad x<0\\ x-1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x<1\\ \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|x^2-4|$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 : Dans chaque cas, quelle valeur doit-on donner au réel m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si} \quad x\neq -1\\ m & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ m & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

Exercice 5 : **Vrai ou faux ? Justifier la réponse.**

Soit f la fonction dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

1. L'équation $f(x)=1$ admet une unique solution.
2. L'équation $f(x)=-3$ admet une unique solutioin.
3. L'image par f de l'intervalle $]0;4]$ est l'intervalle $[0;+\infty[$.
4. Le signe de f est donnée par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x^5-5x+2$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

Exercice 7 : Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée a au moins une solution dans l'intervalle I.

1. $x\sqrt{x+2} = 2$ et $\mathrm{I} = [-2;2]$

2. $(x^3+1)x^2 = 1$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 8 : Démontrer que l'équation $x^3 - x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et encadrer celle-ci par deux entiers successifs.

Exercice 9 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$.
Déterminer selon la valeur du réel k le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$

Exercice 10 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5.96x - 1.96$.

1. **a.** Tracer la courbe représentative de f sur votre calculatrice, dans la fenêtre graphique allant de -4 et 4 en abscisse et de -5 à 5 en ordonnée.
   b. Conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. **a.** Dresser le tableau de variations conplet de f sur $\mathbb{R}$.
   b. La conjecture précédente est-elle vérifiée ?
3. **a.** Pourquoi peut-on affirmer que f se factorise par $(x-1)$?
   b. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   c. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Exercice 11 :

Théorème 1. (Théorème du point fixe)

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$.
On note $f(\mathrm{I})$ l'ensemble de toutes les images par f des réels appartenant à I.
Si $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$, alors f admet au moins un point fixe, ie qu'il existe $x \in \mathrm{I}$ tel que $f(x) = x$

Démontrer ce théorème dans le cas particulier où $\mathrm{I} = [0;1]$.