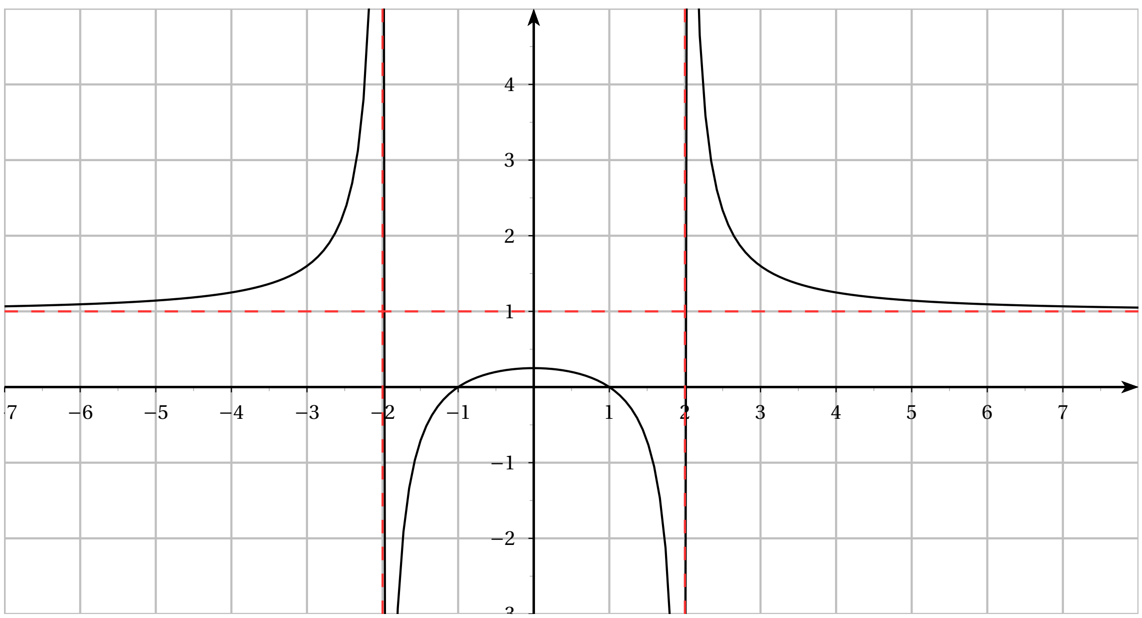
✿ EXERCICES ✿
DÉPASSER SES LIMITES

Exercice 1 : Dans chacun des cas suivants, donner une allure possible de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et enfin la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice 2 : On a tracé la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$ ci-dessous.



Les droites d'équation $x = 2$, $x = -2$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe.
Lire les limites de f en $-\infty$, en $+\infty$, en -2 (à droite et à gauche) et en 2 (à droite et à gauche)
Pour aller plus loin : Proposer une telle fonction.

Exercice 3 : On donne le tableau de variations d'une fonction f, de courbe représentative $\mathscr{C}$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	3

1. Préciser les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$
2. Tracer une allure possible de $\mathscr{C}$

Exercice 4 :

1. **a.** Démontrer que la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0.
   b. Admet-elle une limite en 0^+ ? en 0^- ?
2. **a.** La fonction $f : x \longmapsto \sin\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet-elle une limite en 0 ?
   b. Admet-elle une limite en 0^+ ? en 0^- ?
   c. Observer sa courbe représentative sur votre calculatrice.

Exercice 5 : On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ dont on donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Dresser, en justifiant, les tableaux de variations des fonctions $-f$, $|f|$, f^2 et $\dfrac{1}{f}$, en précisant les limites aux bornes de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-3x}{x^2+x}$

1. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite de f en 0, et en $+\infty$, ainsi que ses variations.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   En donner une interprétation graphique.
3. **a.** Calculer $f'(x)$.
   b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le tableau complet des variations de f.

Exercice 7 :

1. Montrer que pour tout réel x on a :
$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1$$
2. En déduire les limites suivantes :

a.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$$

b.
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$$

Exercice 8 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\sqrt{x^2+4}-x$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x on a $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$
   En déduire la limite de f en $+\infty$.

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf