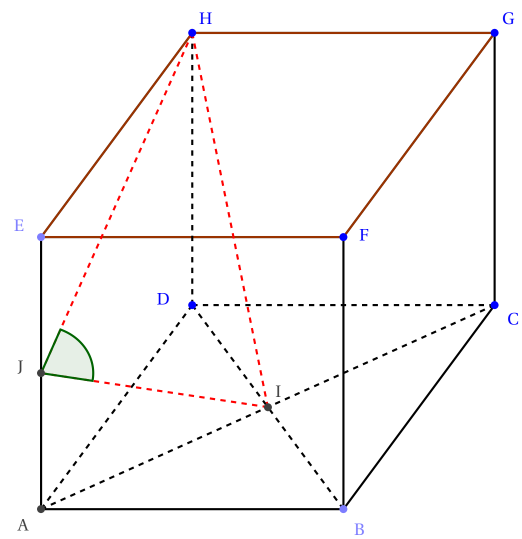
Exercices
Produit Scalaire dans l'espace

Exercice 1 : Soit un tétraèdre régulier ABCD de côté 1. On note I et J les milieu respectifs de [BD] et [AD].
On note K le projeté orthogonal de C sur (BA)

1. Déterminer la position de K.
2. En déduire que $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{4}$

Exercice 2 : On considère un cube ABCDEFGH d'arête a. I est le centre de la face ABCD et J le milieu du segment [AE].

1. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}}$.
2. Déterminer les longueurs des côtés du triangle IJH.
3. En déduire à $0,1^\circ$ près, la mesure de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{IJH}}$



Exercice 3 : On reprend la figure de l'exercice précédent.

1. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GB}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{GI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DB}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{HJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JB}}$$

2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{HJB}}$ à $0,1^\circ$ près.

Exercice 4 : Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(-1;1;2)$, $\mathrm{B}(0;1;0)$ et $\mathrm{C}(2;0;3)$.

1. Calculer les produits scalaires :

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad ; \quad \overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

2. Déterminer une valeur approchée, à $0,1^\circ$, les mesures en degrés des angles géométriques : $\widehat{\mathrm{CAB}}$, $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{BCA}}$

Exercice 5 : Soient ABCD un tétraèdre régulier de côté a et I le milieu du segment [BC].
Déterminer un valeur approchée en degré de la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AID}}$

Exercice 6 : On considère un tétraèdre régulier ABCD, I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD].
G est le milieu du segment [IJ].

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{GA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GC}}$.
2. En déduire à $0,1^\circ$ près la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{AGC}}$.

Exercice 7 : On considère un tétraèdre ABCD, dans lequel la face ABC est un triangle équilatéral de côté 1, et les faces ACD et BCD sont des triangles isocèles rectangles en C.

- Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$. puis $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABD. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, déterminer la position de H sur le segment [AD].
- Calculer une valeur approchée de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{HCB}}$.

Exercice 8 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Etablir l'équivalence :

$$\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \Longleftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Exercice 9 : On considère les points $\mathrm{A}(3;4;-2)$, $\mathrm{B}(1;6;0)$ et $\mathrm{C}(-2;2;1)$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Exercice 10 : Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$on donne les droites Δ et Δ' de représentations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-t \\ z = -7+3t \end{cases} , t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 5-3t' \\ y = 1-3t' \\ z = 2t' \end{cases} , t' \in \mathbb{R}$$

Démontrer que les droites Δ et Δ' sont orthogonales. Sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 11 : Dans le cube ABCDEFGH où P est le milieu du segment [HF]. Quelles sont les positions relatives des droites (AP) et (HF) ? des droites (AP) et (EC) ?

Exercice 12 : Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne le point $A(-1;2;0)$.

1. Démontrer qu'une équation de la sphère (S) de centre A et de rayon 3 est $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$
2. Déterminer les points I et J communs à (S) et à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\left(-1;\frac{1}{2};1\right)$
3. Sans calculs, déterminer IJ.
4. Justifier que (S) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

Exercice 13 : Donner une équation cartésienne du plan passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal, dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

1. $A(3;-1;2)$ et $\vec{n}(1;0;-4)$
2. $A(1;-1;0)$ et $\vec{n}(1;1;-2)$
3. $A(-2;1;2)$ et $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}$
4. $A(3;4;5)$ et $\vec{n}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$

Exercice 14 : Vérifier que chaque équation proposée est l'équation cartésienne d'un plan et trouver un point de ce plan et un vecteur normal :

1. $3x-5y+z-1=0$
2. $x=y$
3. $3z-x-3=0$
4. $y=-2x+1$

Exercice 15 : Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan P (déterminer d'abord un point de ce plan et un vecteur normal) :

1. P est le plan médiateur du segment [AB] avec $A(-1;3;1)$ et $B(0;5;-3)$.
2. P est le plan orthogonal à la droite (AC) passant par l'orthocentre du triangle ABC avec $A(3;0;4)$, $B(-1;1;1)$ et $C(2;0;0)$.

Exercice 16 : Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan (xOy) ? d'un plan perpendiculaire à (xOy) ?

Exercice 17 : Soit $P : 2x-z=0$ et $d : \begin{cases} x = t-1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point $A = P \cap d$.

Exercice 18 : On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$.
Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Exercice 19 : Donner une représentation paramétrique de la droite d définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$P : 2x+y-z-2=0 \qquad \text{et} \qquad Q : x+3y+7z-11=0$$