↜ AP ↝
LA SUITE DES SUITES !

Soit un réel $a > 0$. On considère les propriétés suivantes écrites « au rang n », où n est un entier naturel :

⇝ $\mathrm{P}(n)$: « $10^n - 1$ est divisible par 9 »

⇝ $\mathrm{Q}(n)$: « $(1+a)^n \geq 1 + na$ »

⇝ $\mathrm{R}(n)$: « $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ »

1. **Initialisation :**
   a. Ecrire chacune des propriétés au rang 0 et préciser si elle est vraie au rang 0.
   b. Reprendre la question précédente pour le rang 1.
2. **Hérédité :** On suppose chacune de ces propriétés vraies pour un certain rang k.
   a. Ecrire chaque propriété au rang $(k+1)$.
   b. Peut-on alors démontrer qu'elles sont également vraies au rang $(k+1)$?
3. **Un exemple à compléter :** Fabrice affirme que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Compléter sa démonstration par récurrence suivante.

On note $\mathrm{P}(n)$ la proposition

⇝ **Initialisation :** pour $n =$

– $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 =$

– Et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

Donc la proposition est vraie au rang

⇝ **Hérédité :** On suppose qu'il existe un entier $k \geq$ tel que

On cherche à montrer que

Or $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \cdots + k^2 + (k+1)^2 =$

$=$

$=$

La proposition est vraie au rang

Donc la proposition est

⇝ **Conclusion** : La proposition est et

Elle est donc vraie pour tout $n \geq$

4. **Un exemple à faire tout seul :** On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (n+1)^2$.
5. **L'importance de l'initialisation**
   a. La propriété $\mathrm{T}(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 » est-elle héréditaire pour tout $n \geq 1$?
   b. Est-elle vraie pour tout $n \geq 1$?