Exercice 1 : **7 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   On pourra étudier la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.
6. **a.** Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.
   b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

Exercice 2 : **2 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x-1} + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

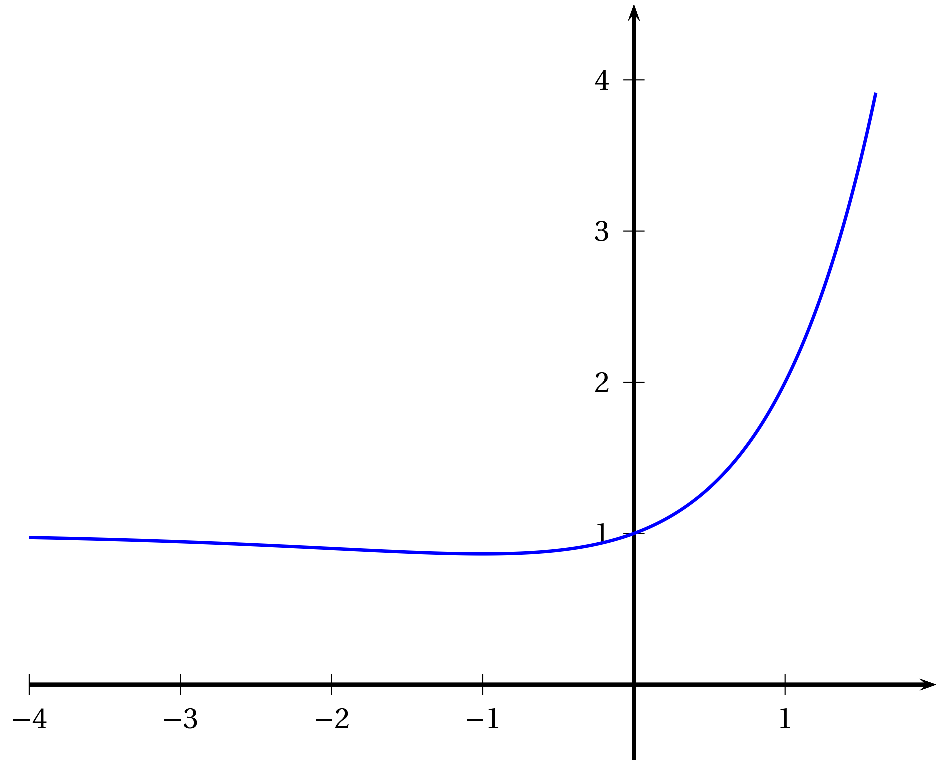
1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite Δ. Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ limité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite Δ, la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.
2. **a.** Montrer qu'il existe deux réels c et d tels que la fonction

$$\mathrm{H} : x \longmapsto (cx + d)e^{x-1}$$

   soit une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \longmapsto xe^{x-1}$.

b. On pose $\mathrm{I} = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{I} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathscr{D}$.



Exercice 3 : **5 points**

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. a. Soit g la fonction définie par $g(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.

b. En déduire la valeur de I_1.

c. Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction H_n par $\mathrm{H}_n(x) = x^{n+1}\mathrm{G}(x)$.

i. Montrer que H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x, $\mathrm{H}'_n(x)$

ii. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2}\mathrm{e} = \frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+2}$$

d. Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{1}{2}$
	Tant que $n<21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n+2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) ontient-on en sortie de cet algorithme ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{I}_n \geqslant 0$.
   b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 4 : 6 points

Partie A :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=2x^3-1+2\ln x$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha)=0$.
   Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.
3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2x-\frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\Delta : y=2x$.
2. Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C :

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=n$.

1. Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$\mathrm{I}_n=2\int_1^n\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.
   a. Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.
   b. En déduire $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$
   c. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3. Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 : **5 points**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0;1]$ telle que :

$$f(0)=0 \text{ et } f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0;1]\text{B}.$$

On ne cherchera pas à déterminer f.

PARTIE A :

1. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;\,1]$.
2. Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $g(x)=f\left(\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.
   La fonction $\dfrac{\sin}{\cos}$ *est appelé tangente et notée* tan.
   a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, puis que, pour tout x de $\left[0;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x)=1$.
   b. Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x)=x$, en déduire que $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$.
3. Montrer que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0\leq f(x)\leqslant\dfrac{\pi}{4}$.

PARTIE B :

Soit (I_n) la suite définie par $I_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

1. Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par $h(x)=xf(x)$.
   a. Calculer $h'(x)$ pour tout x de $[0;1]$.
   b. Montrer que $\mathrm{I}_0=h(1)-h(0)-\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$.
   c. En déduire que $\mathrm{I}_0=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\ln(2)$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n\geqslant 0$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n\leqslant\dfrac{\pi}{4(n+1)}$.
   c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 6 : 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x)=\ln\left(1+x\mathrm{e}^{-x}\right).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

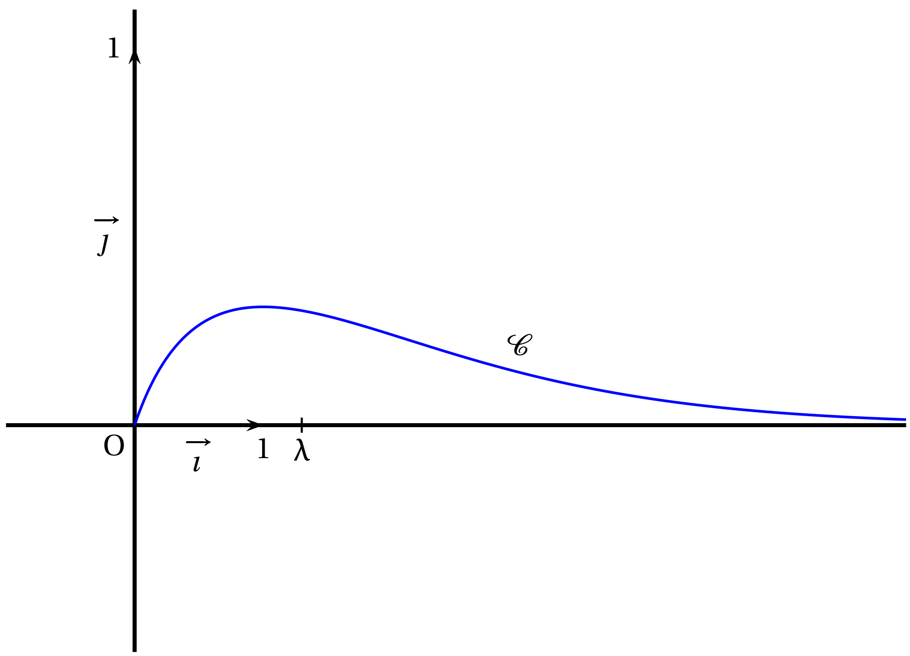
PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.
3. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif. On pose $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x$. On se propose de majorer $\mathscr{A}(\lambda)$.

1. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à $\mathscr{A}(\lambda)$.
2. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $\mathscr{A}(\lambda) \leqslant \lambda \times f(1)$.
3. **Application numérique**
   Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de $\mathscr{A}(5)$, arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où $\lambda = 5$?



Exercice 7 : 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right).$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans un repére orthogonal est donnée en annexe.

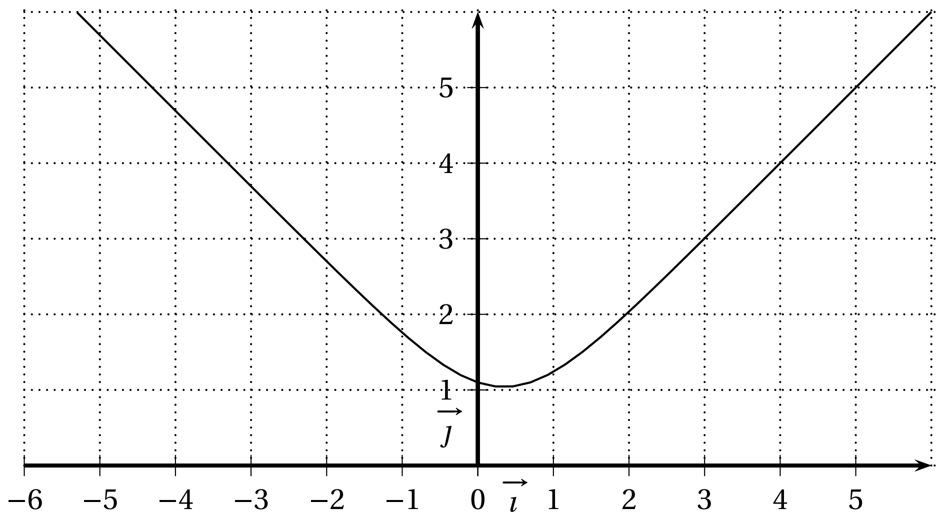
Partie A - étude de fonction f.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Etudier les variations de la fonction f.
   Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.
2. Montrer que, pour tout $\mathrm{X} \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{X}$.
3. En déduire que $0 \leqslant \mathrm{I} \leqslant \displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.



Exercice 8 : 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   b. En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$.

2. Calculer u_1.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n$.

   b. Etudier les variations de la suite (u_n).

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

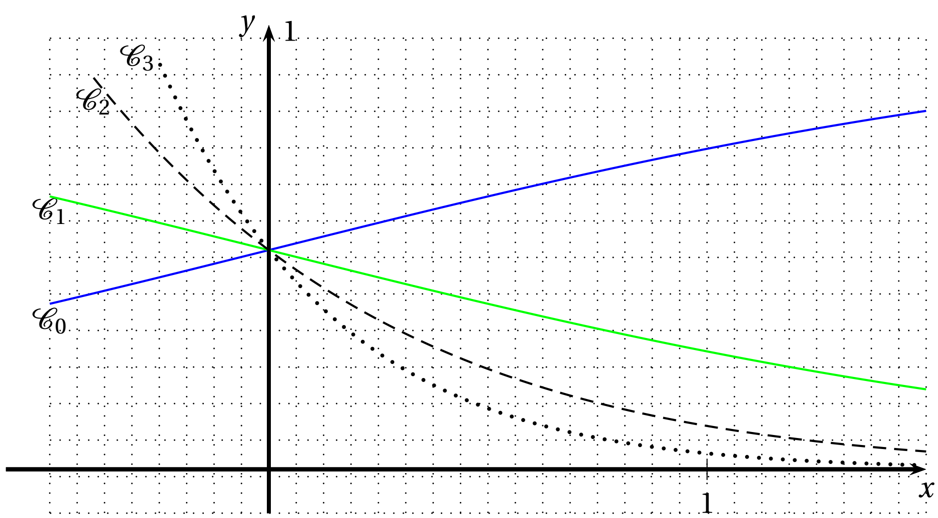
Exercice 9 : 6 points

Soit n un entier naturel.

On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



Partie A : *Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes $\mathscr{C}_n$*

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.

2. Etude de la fonction f_0

   a. étudier le sens de variation de f_0.

   b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

   c. Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Etude de la fonction f_1

a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

c. Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$.

4. Etude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$

a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}.$$

b. Etudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

c. Calculer la dérivée $f_n'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : *étude d'une suite liée aux fonctions f_n*

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 10 : **Partie A** On considère la fonction nutnérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \dfrac{e}{\sqrt{x}} \times \dfrac{x}{e^x}$.

Interpréter graphiquement le résultat.

2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.

4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathscr{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.

Partie B On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Interpréter géométriquement u_n.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a.** Démontrer que F est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

   b. En déduire le sens de variations de F.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel t positif : $t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

   b. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$:

$$F(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x (t+2)e^{1-t}\,dt.$$

   c. Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = -(t+3)e^{1-t}$ et $h(t) = (t+2)e^{1-t}$.

   d. En déduire que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$: $0 \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}$.

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 11 : Les questions sont indépendantes. II est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

1. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

   a. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.

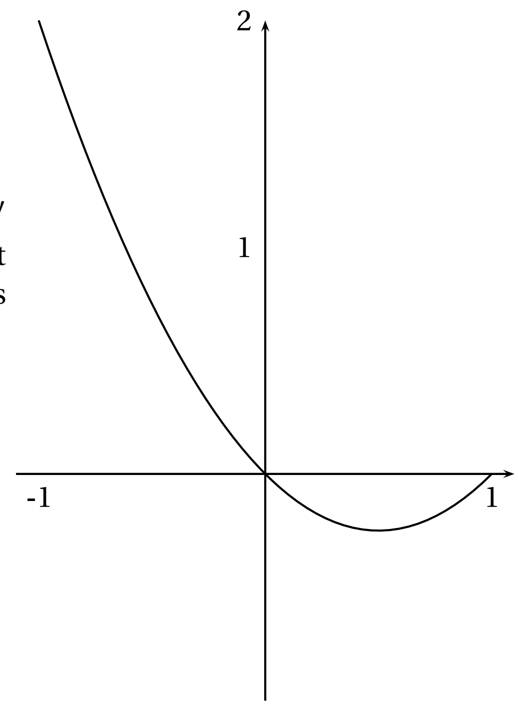
   b. f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

   c. f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2\ ;\ 2]$ est 0.

2. Soit g une fonction définie et dérivable, de dérivée g' continue sur $[-1\ ;\ 1]$. La courbe représentative de g est donnée ci-dessous. Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma :

   a. $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,dx = 0$?

   b. $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,dx \geqslant -\frac{1}{2}$?



Exercice 12 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f\ :\ t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g\ :\ t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\ ;\ 1]$.
   En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

   $$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 13 : On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

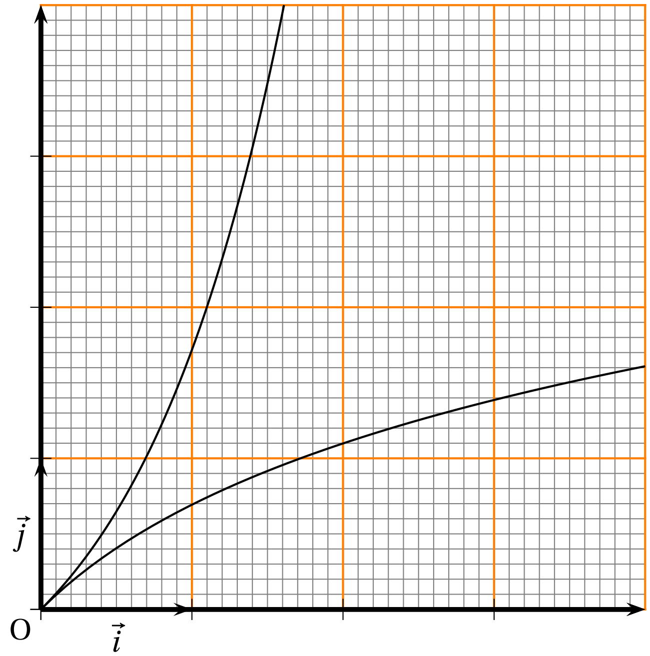
On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat.

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $\mathrm{O}(0\,;\,0)$.
   Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer le nombre $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

   a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que

   $$\mathrm{I}(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x.$$

   b. En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.



Exercice 14 : On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

1. **a.** Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances** On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni. Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$. On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.

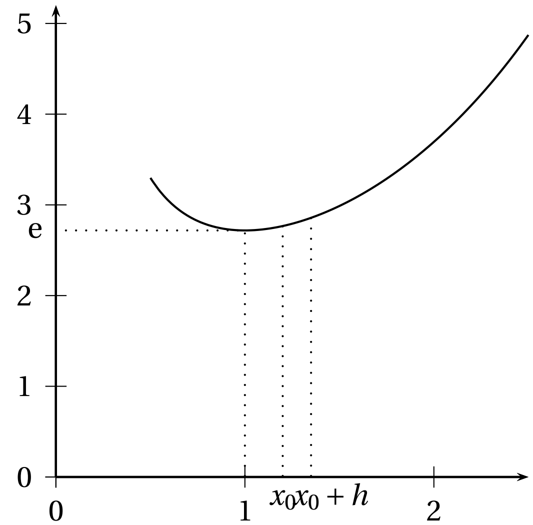
   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :
   $$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

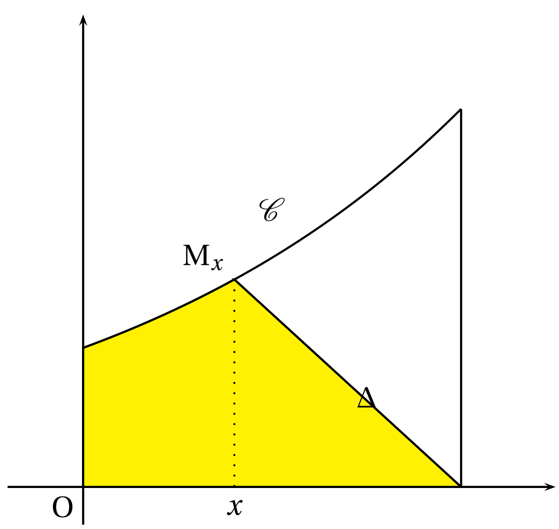
   c. Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.

   e. Conclure.



Exercice 15 : Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On note I le point de coordonnées (1 ; 0). Soient f une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur $[0\,;\,1]$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment [IA] partage Δ en deux régions de même aire. Pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$ on note M_x le point de coordonnées $\left(x,\ f(x)\right)$ et T_x le domaine délimité par la droite IM_x, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. On désigne par F la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Exprimer, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.
2. **Démonstration de cours** Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f.
3. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
4. **a.** Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   b. Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0\,;\,1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.