Exercice 1 : **Nouvelle Calédonie Mars 2014** **(5 points)**

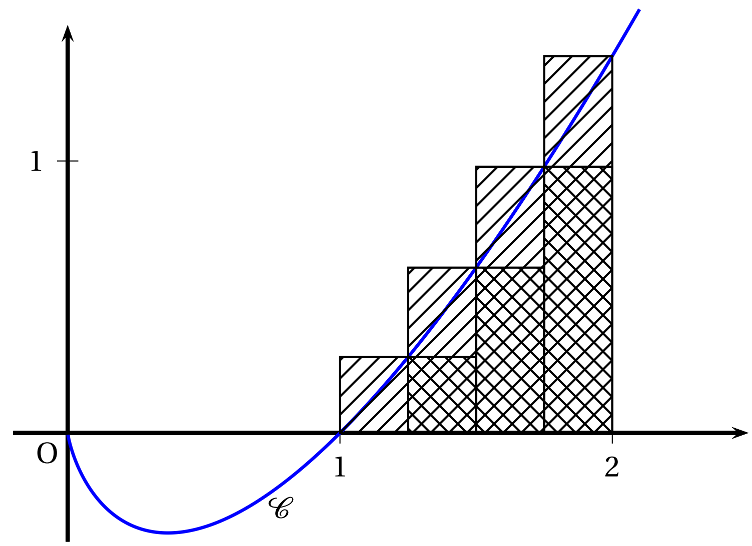
Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.
Soit $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$. (voir la figure ci-contre).



Algorithme :

Variables	k et n sont des entiers naturels U, V sont des nombres réels
Initialisation	U prend la valeur 0 V prend la valeur 0 n prend la valeur 4
Traitement	Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin pour
Affichage	Afficher U Afficher V

1. **a.** Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
   b. Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
   c. En déduire un encadrement de $\mathscr{A}$.
2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right] \end{aligned}.$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant V_n$.

a. Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.

b. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathscr{A}$ d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

Exercice 2 : **Liban mai 2013** **(6 points)**

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \dfrac{1}{1+e^{-kx}}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est donnée en ANNEXE, à rendre avec la copie.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$.
Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment [MP].

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

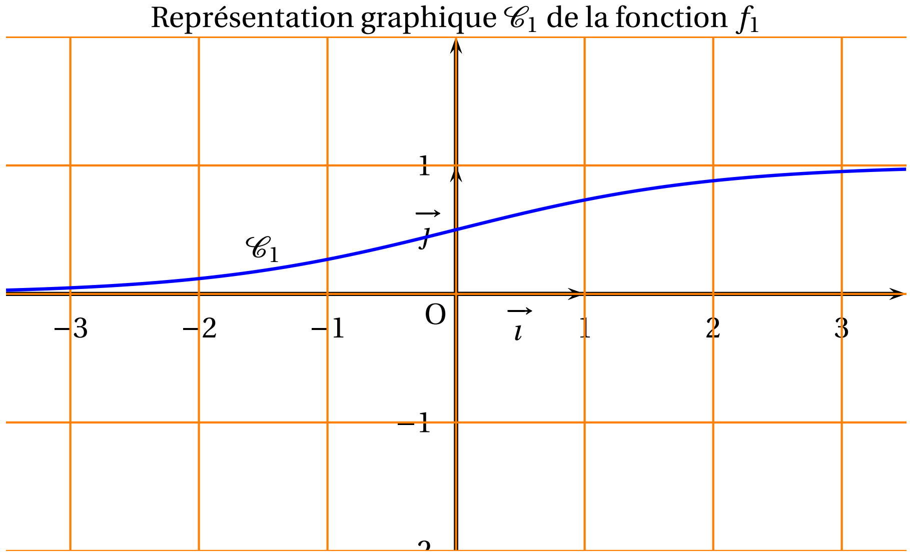
Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

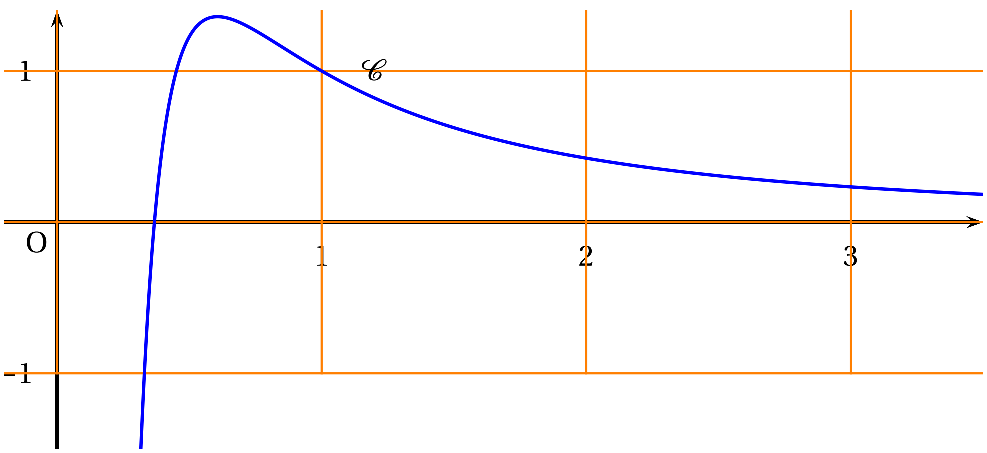
3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.



Exercice 3 : Amérique du Nord Mai 2013 **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

Et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. **a.** Étudier la limite de f en 0.

   b. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

   c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$.

   b. Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.

   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = n$.

a. Démontrer que $0 \leqslant \mathrm{I}_2 \leqslant \mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{-2-\ln(x)}{x}$,est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

<u>Exercice 4</u> : Polynésie Juin 2013 **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathscr{C}$.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

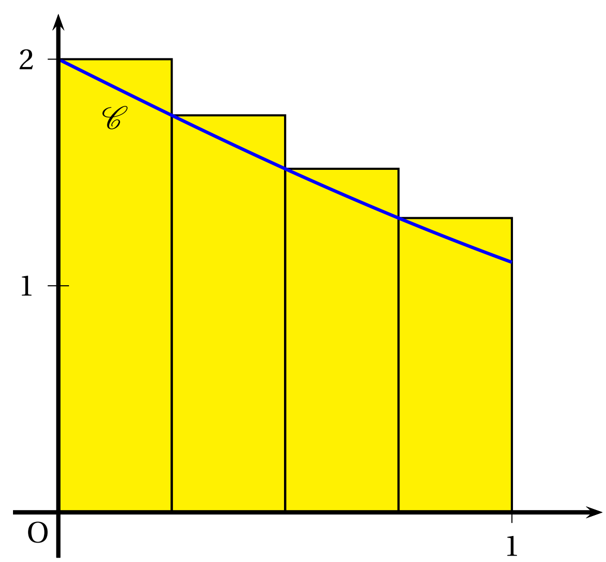
2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. On approche l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;\,1]$ en quatre intervalles de même longueur :

- Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{4}\,;\,1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

Cette construction est illustrée ci-contre.



L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0 ; 1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2.a.
Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-3)\mathrm{e}^{-x}$
On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

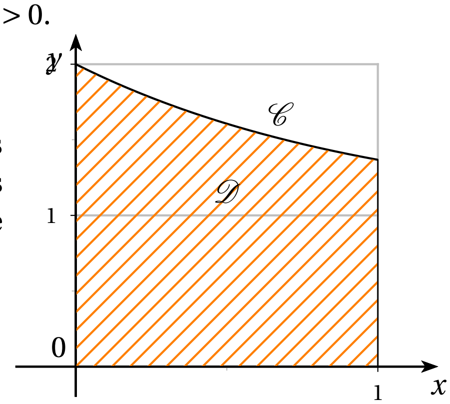
a. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $\mathscr{A}$ par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2. a, c'est-à-dire l'écart entre ces deux valeurs.

Exercice 5 : Centres Etrangers Juin 2013 **(5 points)**

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $g(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $g(x) > 0$.

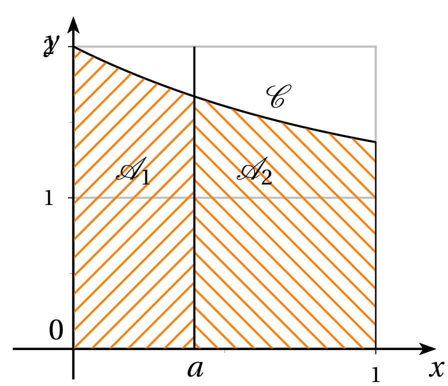
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
La courbe $\mathscr{C}$ et le domaine $\mathscr{D}$ sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leqslant a \leqslant 1$.
On note $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox),les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis $\mathscr{A}_2$ celle du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.
$\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont exprimées en unités d'aire.



1. a. Démontrer que $\mathscr{A}_1 = a - e^{-a} + 1$.
   b. Exprimer $\mathscr{A}_2$ en fonction de a.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \dfrac{1}{e}$
   a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0 ; 1]$. en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.
2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 6 : **Antilles Guyane Juin 2013** **(5 points)**

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = (x+1)e^x$

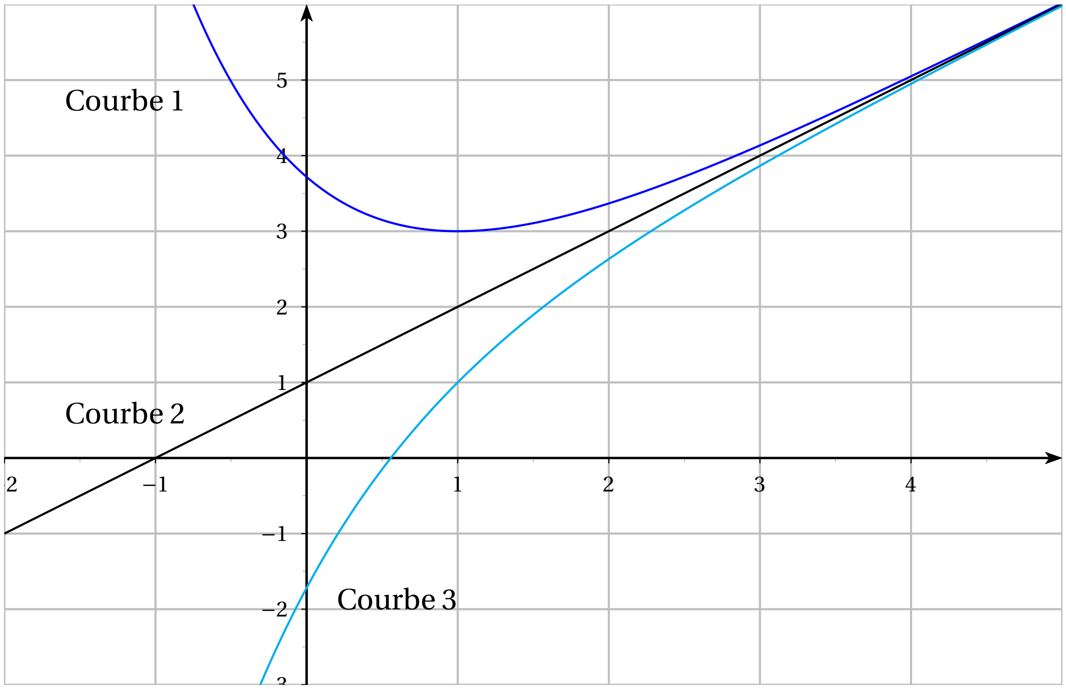
1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

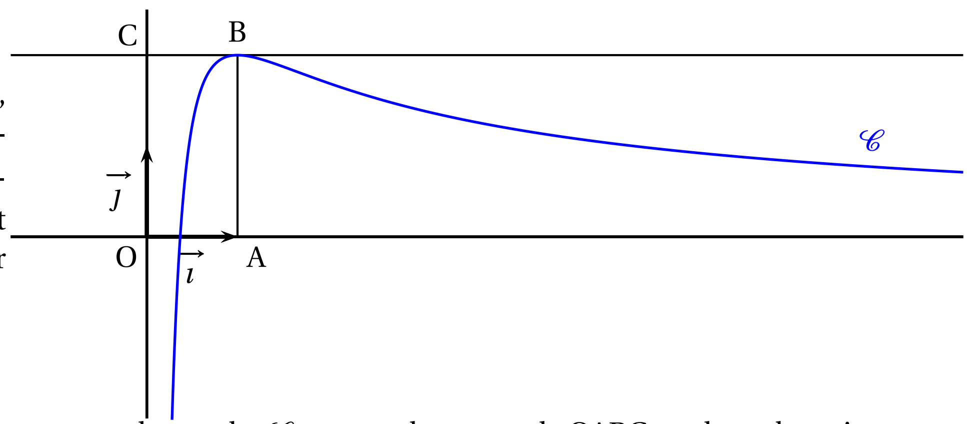
On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par : $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté en annexe les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_e$, et $\mathscr{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$: $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.
4. a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_e$, $\mathscr{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe.
   b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathscr{C}_e$, $\mathscr{C}_{-e}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathscr{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathscr{A}(a) = 2e - 2e^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathscr{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.



Exercice 7 : **Métropole juin 2013** **(Extrait)**



Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2+2\ln x}{x}$.

Le but de cette question est de démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales.

1. Justifier que cela revient à démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.
2. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

Exercice 8 : **Métropole Juin 2012** **(Extrait)**

Soit k un entier strictement positif.

1. Justifier l'inégalité $\displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$
2. En déduire que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$
3. Démontrer alors l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$