Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n}.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Exercice 2 : **Partie A Restitution organisée des connaissances**

On rappelle que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$$

Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x)=x-\frac{\ln(x)}{x}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x)=x^2-1+\ln(x)$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

c. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=0$

d. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y=x$

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y=x$

a. Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k=\dfrac{\ln(k)}{k}$.

b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k$ soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

Exercice 3 : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 &= \dfrac{1}{2}\\ u_{n+1} &= \dfrac{n+1}{2n}u_n\end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $v_n=\dfrac{u_n}{n}$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\dfrac{n}{2^n}$

4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\ln x-x\ln 2$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

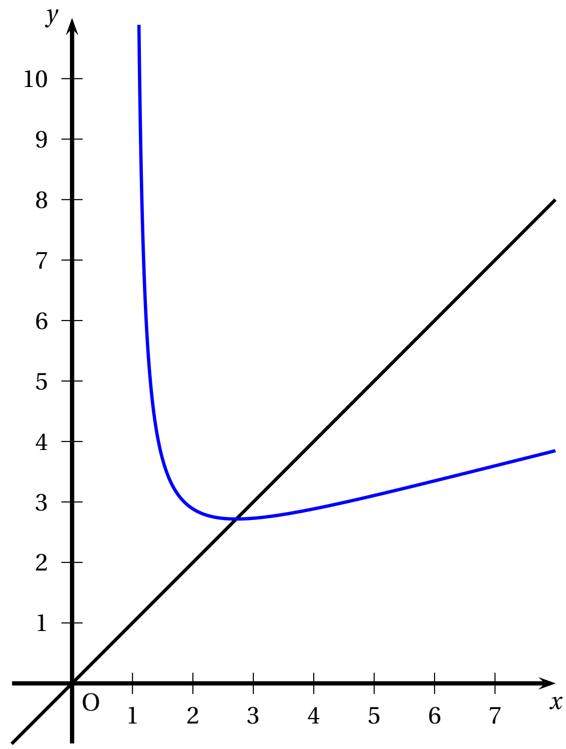
Exercice 4 :

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur le graphique ci-contre, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.



1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

3. En déduire que si $x \geq e$ alors $f(x) \geq e$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Sur le graphique précédent, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \mathrm{e}$.
b. Déterminer les variations de la suite (u_n).
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

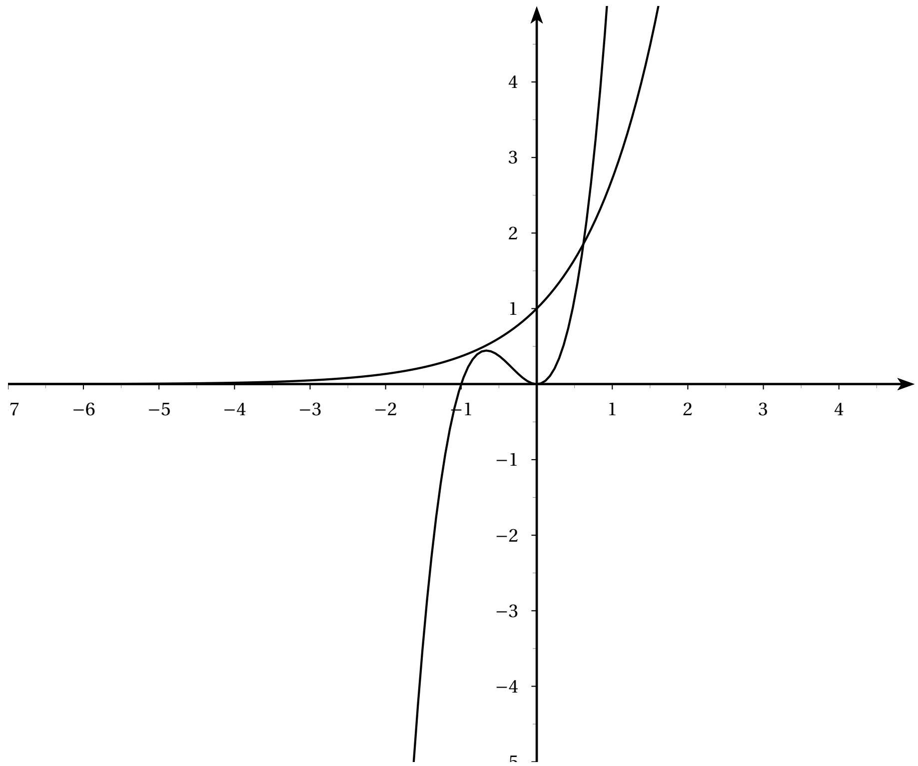
n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,1066746728	2,7406525323	2,7183726346	2,71828183001	2,7182818285

Exercice 5 : On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :

$$e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$$

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. **a.** Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.
   b. En déduire que l'équation (E)n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.
   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x.$$

   Montrer que, sur $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.
3. **a.** Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

   b. Déterminer les variations de la fonction h.
   c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
   d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

Exercice 6 :

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 5\ln(x+3) - x$

1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.
   d. En déduire la limite de f en $+\infty$.
   e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
   b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\ ;\ 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

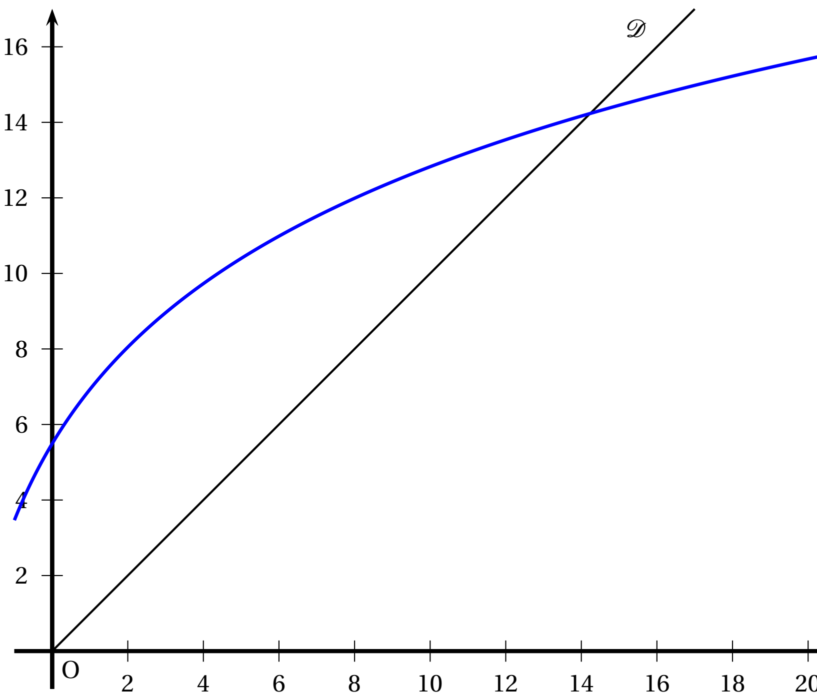
Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

Ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction g.



1. **a.** Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)
2. **a.** Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
   e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
3. On considère l'algorithme ci-contre :
   a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Justifier que cet algorithme se termine.
   b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

```
u prend la valeur 4
Tant que u − 14,2 < 0
    u prend la valeur de 5ln(u + 3)
Fin du Tant que
Afficher u
```