Travail de l'élève 1 : On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x^2+1}{4-x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etude des variations de f

a. Dériver f sur son ensemble de définition.

On rappelle la formule à connaître désormais par coeur $\boxed{(uv)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}}$

b. Dresser alors le tableau de variations de f.

3. On aimerait rajouter des informations « au bout des flèches » du tableau.

a. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement ces valeurs.

b. A votre avis, comment les appelle-t-on ? les note-t-on ? les définit-on ?

4. Justification en l'infini :

a. Dresser le tableau de signe de $f(x) - 2$

b. Ecrire alors $|f(x) - 2|$ sans valeur absolue.

c. On considère un réel ε strictement positif.

i. Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$ on ait $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

ii. De même, montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \leq x_0$ on ait $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Travail de l'élève 2 : On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2+x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etude des variations de f

a. Dériver f sur son ensemble de définition.

b. Dresser alors le tableau de variations de f.

3. On aimerait rajouter des informations « au bout des flèches » du tableau.

a. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer graphiquement ces valeurs.

b. A votre avis, comment les appelle-t-on ? les note-t-on ? les définit-on ?

4. Justification en l'infini :

a. On considère un réel A strictement positif.

i. Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \geq x_0$ on ait $f(x) > A$.

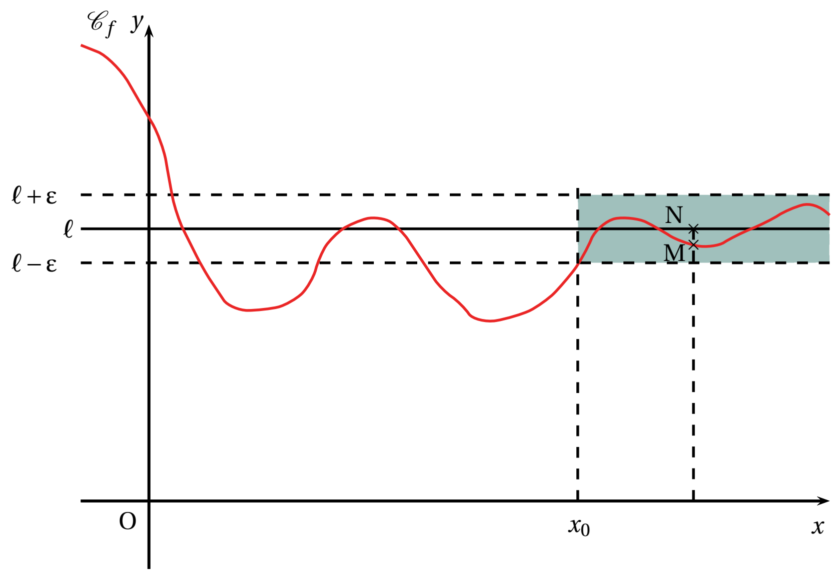
ii. De même, montrer qu'il existe un réel x_0 tel que pour tout $x \leq x_0$ on ait $f(x) < A$.

Définition 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a;+\infty[$ et un réel ℓ.
On dit que f **admet pour limite ℓ (ou tend vers ℓ) quand x tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est à la courbe représentative de f en $+\infty$.



Remarque :

Définition 2.

Une fonction f **tend vers** :

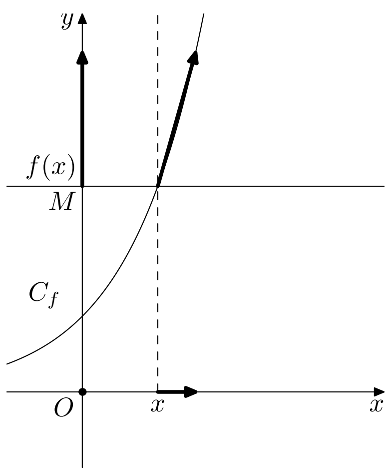
- $+\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]A;+\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

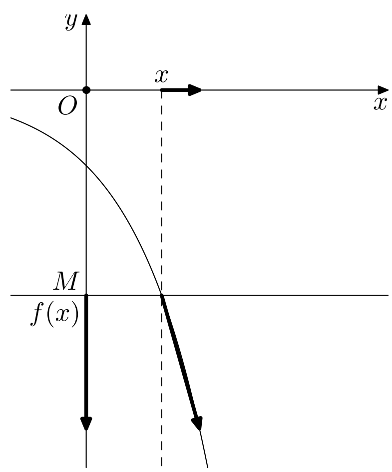
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- $-\infty$ **quand** x **tend vers** $+\infty$, lorsque tout intervalle du type $]-\infty;A[$, avec $A \in \mathbb{R}$, contient toutes les images $f(x)$ pour x assez grand et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Illustrations :





Remarque :

Définition 3.

Une fonction f **tend vers** :

– **un réel** ℓ **quand** x **tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

– $+\infty$ **quand** x **tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle du type $]\lambda; +\infty[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

– $-\infty$ **quand** x **tend vers un réel** a, lorsque pour tout intervalle du type $]-\infty; \lambda[$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout réel x assez proche de a. On note :

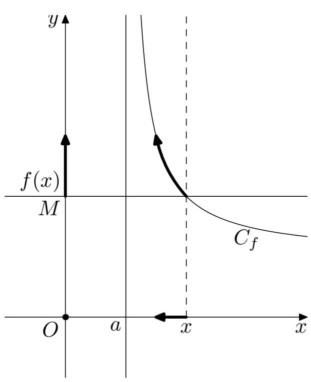
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Dans tous les cas, on définit la limite de f en a **à droite** (respectivement **à gauche**) de manière analogue, en considérant x assez proche de a mais restant strictement supérieur à a (respectivement inférieur).
On note :

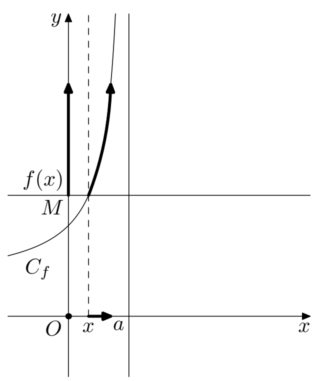
$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Illustrations :

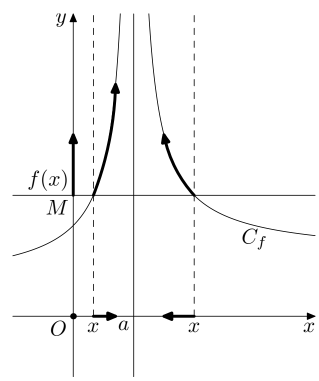
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$



Définition 4.

Lorsque f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un réel a (ou en a à droite, ou en a à gauche), on dit que la droite d'équation $x = a$ est à la courbe représentative de f.

Remarque :