Chapitre 10

Logarithme et exponentielle sont au restaurant ...

Hors Sujet

Titre : « Autoportrait avec cigarette (1895) » et « La madone (1895-1902) »
Auteur : Edvard Munch
Présentation succinte : Edvard Munch (1863 - 1944) est un peintre expressionniste norvégien, souvent considéré comme le pionnier de l'expressionnisme et très tôt réputé pour son appartenance à une nouvelle époque artistique en Europe. L'importance de son œuvre est aujourd'hui reconnue dans le monde.
Les œuvres de Munch les plus connues sont celles des années 1890, notamment *Le Cri* (1893) (cf fin du cours), pièce de la série *La Frise de la Vie*, que Munch a assemblée au tournant du siècle. Sa production ultérieure attire toutefois de plus en plus l'attention et semble inspirer tout spécialement les artistes actuels.
Munch traite d'une manière récurrente des thèmes de la vie, de l'amour, de la peur et de la mort. La collection la plus importante de ses œuvres se trouve au le Musée Munch dans Oslo. Quelques-unes de ses peintures se trouvent à la galerie nationale d'Oslo. L'Hotel Continental d'Oslo possède de nombreuses impressions. Enfin, la pinacothèque de Paris a organisé en 2010 la superbe exposition *Anti-Cri* regroupant de nombreux tableaux de Munch, issus de collections privées.
Le Cri et *La Madone* ont été volés le 22 août 2004 au musée Munch d'Oslo. Ils ont été récupérés dans des circonstances non connues en août 2006 en Norvège... Les deux œuvres ensemble sont estimées à 100 millions de dollars.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

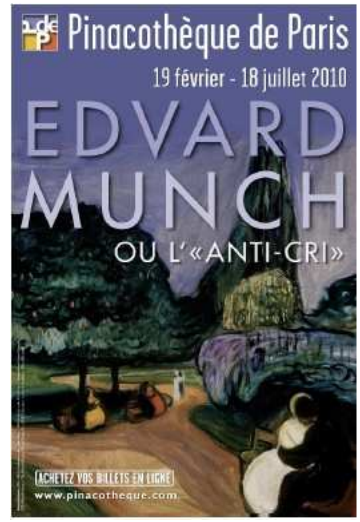
Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Découvrir l'affixe d'un nombre complexe
- ⇝ Interpréter géométriquement le module et l'argument d'un nombre complexe
- ⇝ Les utiliser pour placer un nombre complexe dans le plan
- ⇝ Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle d'un nombre complexe
- ⇝ Utiliser les nombres complexes pour résoudre des problèmes géométriques

« *La maladie, la folie et la mort sont les anges noirs qui ont veillé sur mon berceau* »
EDVARD MUNCH

CHAPITRE 10: LOGARITHME ET EXPONENTIELLE SONT AU RESTAURANT ...



Au fil du temps

Comme souvent en mathématiques, un même objet (ici le logarithme népérien) peut être défini de différentes manières (nous en verrons trois) en aboutissant malgré tout aux mêmes propriétés : le procédé de fabrication change, mais le produit fini est le même.
Ainsi, le programme de TS actuel introduit la fonction logarithme népérien à partir de la fonction exponentielle (nous en avons déjà parlé). Une fois son existence démontrée, cela entraine toutes sortes de propriétés que nous démontrerons également. Cependant, l'histoire s'est déroulé tout autrement ...
Avant de réellement commencer donc, faisons un bref (?) résumé historique de la fonction logarithme népérien, car il est toujours intéressant de replacer les éléments dans leur contexte pour comprendre comment on en est arrivé à se poser certaines questions, même si aujourd'hui, on y répond d'une tout autre manière qu'à l'époque.

I) Au fil de l'Histoire

I.1. Une fonction transformant les produits en sommes

Au début du XVII^e siècle, les mesures astronomiques, nécessaires à la navigation par exemple ou à l'étude du mouvement des planètes, engendrent des calculs ... astronomiques ! et particulièrement fastidieux à effectuer à la main. Pour simplifier ces calculs, on cherche à réaliser des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondance les nombres de telle manière que pour effectuer une multiplication, il suffira d'effectuer une addition, beaucoup plus simple !
Il est en effet plus aisé de calculer $113+254$ *que* 113×254.

Exemple :
Par exemple, on peut mettre en correspondance les termes d'une suite géométrique de raison 2, de premier terme $u_0 = 1$ et ses rangs :

u_n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	$\times$
$f(u_n) = n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$+$

Ainsi, pour calculer 16×32, on fait $4+5=9$, donc $16 \times 32 = 512$. Easy !
Le problème, c'est que cette méthode ne fonctionne que dans des cas particuliers : il faut que les deux nombres soient des termes de suites géométriques. Si l'on veut calculer 16×33 par cette méthode, c'est bien plus complexe !

Il s'agit de réaliser une fois pour toutes ces cacluls fastidieux, puis de mettre les tables à disposition des calculateurs. Les mathématiciens ont donc été amenés à rechercher les fonctions f transformant les produits en sommes, ie à résoudre l'équation fonctionnelle $f(a\times b) = f(a)+f(b)$ (l'inconnue étant la fonction f).
En 1614, l'écossais John NAPIER (en français Jean Néper..) établit une telle table de calcul, qu'il appelle Tables de Logarithmes (arithmos=nombres, logos=raison, rapport). Ces tables eurent immédiatement un très grand succès, et d'autres tables furent très vite publiées, comme celle de Briggs très proche de celle ci-dessous.

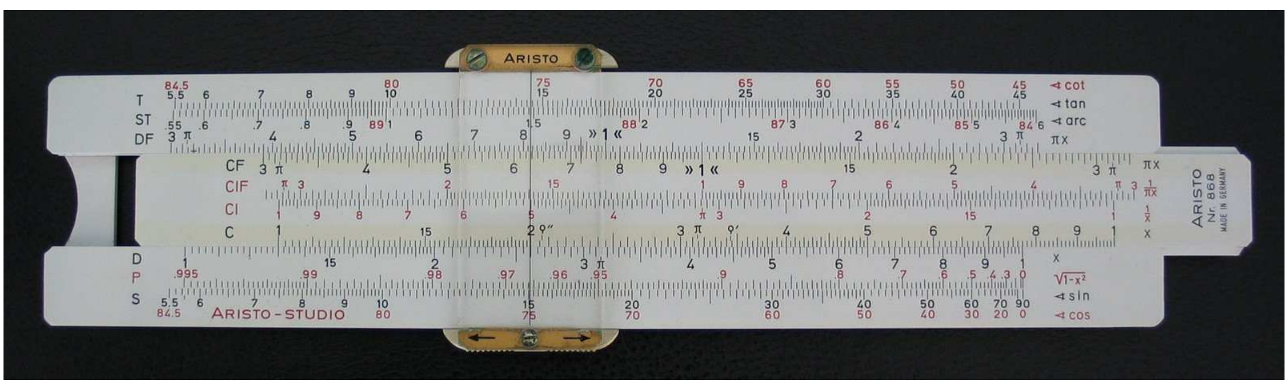

TABLE DES LOGARITHMES,

DES NOMBRES PREMIERS, DEPUIS 1 JUSQU'A 1300, EXCLUSIVEMENT,

AVEC QUINZE DÉCIMALES.

Nombr.	Logarithmes.	Nombr.	Logarithmes.	Nombr.	Logarithmes.	Nombr.	Logarithmes.
1	00000 00000 00000 0	241	38201 70425 74868 5	577	76117 58131 53751 4	937	97173 95908 87778 2
2	30102 99956 63981 1	251	39967 37214 81038 1	587	76863 81042 47614 4	941	97358 96234 27256 9
3	47712 12547 19662 4	257	40993 31233 31294 3	593	77305 46933 64262 6	947	97634 99790 03273 4
5	69897 00043 36018 8	263	41995 57484 89757 8	599	77742 68223 89311 5	953	97909 29006 38526 4
7	84509 80400 14256 8	269	42975 22800 02407 9	601	77887 44720 02759 3	967	98542 64740 83001 6
11	04139 26851 58225 0	271	43296 92908 74405 7	607	78318 86910 75257 5	971	98721 92299 08004 8

Elles furent massivement utilisées pour les calculs pendant plus de trois siècles, et permirent la création des règle à calculs, ancêtre de la calculatrice (mais pas si ancien que cela puisque M. Neibecker a passé son bac avec, quoique ...) très précises et permettant toutes sortes de calculs.



Elles furent détrônées à la fin du XX^e par la mise sur le marché de calculatrices performantes.

Travail de l'élève 1 : Pouvez-vous créer votre propre table ? ?
Voici deux exemples d'extraits de tables logarithmiques :

x	2	5	10	20		40	100	1000		$\times$
$f(x)$	0.30103		1		1.5				52	$+$

x	0.25	0.5	1	1.25	1.5	2		3	4	5	6	24	30	$\times$
$f(x)$						0.6931	1	1.0986	1.3863					$+$

Pour déterminer le produit de deux nombres a et b :

- $\rightsquigarrow$ on lit dans la table $f(a)$ et $f(b)$
- $\rightsquigarrow$ on calcule facilement $f(a)+f(b)$
- $\rightsquigarrow$ on recherche dans la table quelle image par f vaut cette somme,
- $\rightsquigarrow$ on lit alors dans la table l'antécédent correspondant. Il s'agit de $a \times b$!

1. **Première table** :
   - **a.** Vérifier que la multiplication de deux nombres de la première ligne correspond à l'addition de deux nombres de la deuxième ligne.
   - **b.** Quel nombre doit-on mettre dans la deuxième ligne sous 40 ? 100 ? 1000 ?
   - **c.** Quel nombre doit-on écrire dans la première ligne au dessus de 52 ? Que constatez-vous ?
   - **d.** Quel nombre doit-on mettre sous 5 ?
     Vérifier la cohérence de votre valeur en retrouvant celle sous 100 grâce à elle.
   - **e.** Proposer une méthode pour trouver la valeur exacte de l'antécédent de 1.5 par la fonction f, sans calculatrice.
     *On dit que le résultat est la **moyenne géométrique** de 10 et 100.*

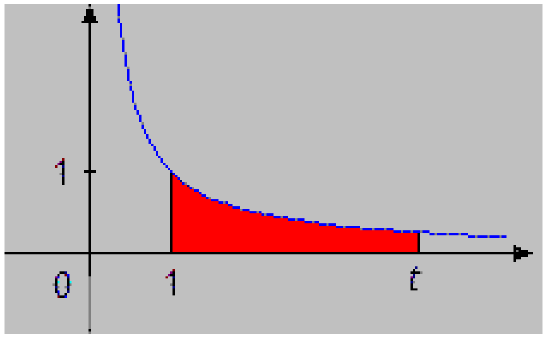
   *La fonction décrite dans la première table s'appelle **Logarithme décimal**, notée **Log**, et est très utilisée en sciences (mesure du pH, magnitude des étoiles, niveau sonore en décibels, en musique avec le spectre sonore, en électronique, en radioactivté ...*
   Elle a également permis à Richter d'exprimer la magnitude d'un séisme sur une échelle, dite logarithmique, très connue et très pratique pour faire référence à la force d'un séisme.
   On retrouve ce type d'échelle en géographie, pour l'étude des dynamiques de populations.

2. **Deuxième table** : il s'agit également d'une table logarithmique, donc la multiplication de deux nombres de la deuxième ligne correspond encore à l'addition de deux nombres de la première ligne.
   - **a.** Expliquer pourquoi $f(2)+f(2)$ ne vaut pas exactement $f(4)$.
   - **b.** Quels nombres doit-on mettre sous 6 ? de 24 ? 1 ?
   - **c.** Compléter les cases sous 0.5 et 0.25. Que constate-t-on ?
   - **d.** En déduire sous 1.5.
   - **e.** Expliquer pourquoi on ne peut pas obtenir l'image de 5 par cette fonction facilement ? et celle de 30 ?
     Pour obtenir l'image de 5, on procède par dichotomie.
     On calcule la moyenne arithmétique de $f(4)$ et $f(6)$: $\dfrac{f(4)+f(6)}{2} \simeq 1.58903$.
     Puis on calcule l'antécédent de ce nombre, qui est la moyenne géométrique de 4 et 6, ie $\sqrt{4\times 6} = \sqrt{24} < 5$.
     Et on recommence avec ce procédé en prenant comme nombre de départ $\sqrt{24}$ et 6, car $\sqrt{24} < 5 < 6$, jusqu'à obtenir une précision convenable.
     Cette méthode suggère évidemment que la fonction logarithme décrite est continue, et utilise le théorème des valeurs intermédiaires.
   - **f.** On donne $f(5) \simeq 1.60948$. En déduire $f(30)$ et $f(1.25)$.
   - **g.** Comment calculer à l'aide de cette table 1.25×24 sans effectuer de multiplication ?

   *La fonction décrite dans la deuxième table s'appelle **Logarithme Népérien**, noté **Ln**, en hommage à John, même si sa table n'était pas celle-ci. C'est la seule fonction logarithme que nous étudierons dans ce chapitre.*

I.2. Une Primitive de la fonction inverse

On date en général la naissance du logarithme népérien de 1647, date à laquelle Grégoire de Saint-Vincent travaille sur la quadrature de l'hyperbole (la recherche d'un carré ayant la même aire que la surface située sous l'hyperbole)



Il démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété des fonctions logarithmes (transformation d'un produit en somme). Mais lui-même ne voit pas le lien avec les logarithmes inventés par John.
La fonction ln s'est d'ailleurs appelée un certain temps fonction logarithme hyperbolique, compte tenu de sa découverte comme aire sous l'hyperbole.
On l'a également appelé logarithme naturel lorsque, en 1668, Nicolaus Mercator met en place une méthode de calcul assez simple de ses valeurs. Le calcul des autres logarithmes apparaît alors bien compliqué et le logarithme népérien devient le plus naturel...

Avant 2005, en Terminale S, on partait de ce problème de quadrature, et on définissait le logarithme népérien comme la fonction qui à tout $t > 0$ associe l'aire géométrique de la surface comprise entre la hyperbole, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = t$.
Nous verrons dans un prochain chapitre que cela implique que le logarithme népérien est la primitive de la fonction inverse qui s'annule en 1, ie que $ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et $\ln(1) = 0$. Nous démontrerons ici ce dernier résultat, mais en partant d'une autre définition de la fonction.

Remarques :

- Vous pouvez constater que dans vos tableaux de dérivées, vous n'aviez aucune fonction donc la dérivée valait $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ alors que vous en aviez pour n'importe quelle fonction du type x^n avec $n \in \mathbb{Z}$ différent de 1.
- Donner une autre primitive de la fonction inverse.

I.3. La fonction réciproque de la fonction exponentielle

Une dizaine d'annés plus tard (1676), Newton envoie une lettre à Leibniz dans lesquelles il ose enfin écrire le premier exposant fractionnaire (et en expression littérale s'il vous plait !) et en donne une signification. Dès la lettre suivante, il en vient aux exposants irrationnels. Cependant il n'en donne aucune définition ni calcul approché.
Leibniz s'empare de ce concept et présente pour la première fois en 1678 un exposant variable dans une expression, x^y. Mais, il n'en explique pas la signification non plus.
En 1679, il confie à Huygens qu'il a encore du mal à exploiter des équations de la forme $x^x - x = 24$ (cela à l'air hyper simple non pourtant ? !).
La notation $a^{\frac{p}{q}}$ se généralise cependant et les exposants commencent à être perçus comme des logarithmes (des produits revenant à des sommes). La notion prend peu à peu corps jusqu'à se voir qualifiée d'exponentielle.
En 1690-1691, Leibniz confie à Huygens que de telles expressions ne sont plus obscures. Il les relie explicitement aux logarithmes expliquant que pour tout $a > 0$, on a $\ln(a) = x \iff a = b^x$ où b est une constante telle que $\ln(b) = 1$. C'est la première apparition du nombre transcendant e, bien que personne ne le sache encore.

La fonction exponentielle a été étudiée en tant que telle en 1697 par Jean Bernoulli et c'est ainsi que les fonctions exponentielles firent leur entrée dans le monde des mathématiques. Pour le nombre e, il a fallu encore attendre un siècle avec Euler ...

Et c'est désormais ainsi qu'en Terminale S, on aborde la fonction logarithme : comme la fonction *réciproque* de la fonction exponentielle. Place au cours !

II) Au fil du programme

II.1. Existence de la fonction logarithme népérien

On se rappelle que la fonction $\exp$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, on sait alors que pour tout $a > 0$, il existe un **unique** réel x, antécédent de a par la fonction $\exp$, ie tel que $e^x = a$.
On dit que la fonction exponentielle est une **bijection** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
Grâce à l'unicité, on peut définir la fonction qui à a associe x. On dit que cette fonction est la fonction réciproque de l'exponentielle.
Il s'agit aussi d'une bijection, mais de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} x = \ln(y) \in \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "\exp"] & y = e^x \in \mathbb{R}^{+*} \arrow[l, bend left, "\ln"] \end{tikzcd}$$

Remarque : On a donc $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \qquad e^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y}$

Définition 1. (Propriété)

On appelle fonction **logarithme népérien** la fonction qui à tout $x > 0$ associe l'unique solution de l'équation $e^t = x$, d'inconnue t. On note $t = \ln(x)$ et on a donc

$$\forall x > 0, \quad e^{\ln(x)} = x$$

La fonction $\ln$ est appelée fonction *réciproque* de la fonction $\exp$.

Remarques :

- Comme $x = e^t > 0$, $\ln(x)$ n'a de sens que si $x > 0$. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\ln\left(e^x\right)$ est solution de $e^t = e^x \iff x = t = \ln\left(e^x\right)$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln\left(e^x\right) = x$$

- En particulier $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- Vous connaissez d'autre fonction réciproque. En donner des exemples.

Exemples :

Trouver les ensemble de définition des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(x+3)$ et $g(x) = \ln(x^2 - x - 2)$.
Résoudre $e^x = 5$, $\ln(x) = 5$ et $e^{e^x} = 3$.

Exercice(s) du livre : Déclic : 20 à 22 p 164

II.2. Propriétés algébriques

Théorème 1.

La fonction ln transforme les produits en sommes, ie pour tout $a>0$ et $b>0$ on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

Preuve

La fonction exponentielle transforme les sommes en produits donc $e^{\ln a+\ln b} = e^{\ln a}e^{\ln b} = ab$ En appliquant le logarithme à cette égalité on obtient :

$$\ln a + \ln b = \ln ab$$

Corollaire 1.

Pour tous a et b strictement positif et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

1. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
4. $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Preuve

1. D'après le théorème on a $\ln b + \ln\frac{1}{b} = \ln b \times \frac{1}{b} = \ln 1 = 0$. D'où $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
2. On a :
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
3. On veut déjà démontrer « $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ».
   - ⇝ *Initialisation* : Pour $n=0$, $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et $0 \times ł(a) = 0$. Donc la propriété est vraie.
   - ⇝ *Hérédité* : On suppose qu'il existe un certain n tel que $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
     Regardons ce que vaut $\ln\left(a^{n+1}\right)$. On a :
$$\begin{aligned}\ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n \times a\right)\\ &= \ln\left(a^n\right) + \ln a && \text{d'après le théorème}\\ &= n\ln a + \ln a && \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= (n+1)\ln(a)\end{aligned}$$

   La propriété est donc initialisée et héréditaire, par conséquent pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$.
   Si désormais $n<0$, alors $-n>0$ et :
$$\ln a^n = \ln\frac{1}{a^{-n}} = -\ln a^{-n} = -(-n\ln a) = n\ln a$$
4. $$\ln\lambda = \ln\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda} = \ln\sqrt{\lambda} + \ln\sqrt{\lambda} = 2\ln\sqrt{\lambda} \Longrightarrow \ln\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2}\ln\lambda$$

Exemples :

1. Ecrire à l'aide de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres $A = \ln 144$ et $B = \ln 81 + \ln 3\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(5-x) > 2\ln(x+1)$. *Penser au domaine de validité*
3. Une voiture perd en moyenne 15% de valeur en un an. Au bout de combien d'années a-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

Exercice(s) du livre : Déclic : 37 + 39 + 43 + 44 p 165 + 50 p 166

II.3. Lien des fonctions exponentielle et logarithme avec les suites

Travail de l'élève **2.** Déclic activité 3 p 152

III) Etude de la fonction logarithme népérien

III.1. Sens de variation

Théorème 2.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ i.e

$$0 < a < b \Longleftrightarrow \ln a < \ln b$$

Preuve

On sait que pour tous a et b strictement positifs on a $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Donc :

$$\begin{aligned} & 0 < a < b \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 < e^{\ln a} < e^{\ln b} \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln a < \ln b \qquad \text{car } e^{A} < e^{B} \Longleftrightarrow A < B \end{aligned}$$

Ainsi nous venons de démontrer que le logarithme népérien est une fonction strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exemple :

Résolvons l'inéquation suivante $\ln(5-x) \leq \ln(3-2x)$

⇝ *Domaine de validité* : Cette équation est définie pour tout x vérifiant

$$\begin{cases} 5-x > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

⇝ *Résolution* : Ainsi pour tout $x < \dfrac{3}{2}$ on a :

$$\begin{aligned} & \ln(5-x) \leq \ln(3-2x) \\ \Longleftrightarrow \quad & 5-x \leq 3-2x \\ \Longleftrightarrow \quad & x \leq -2 \qquad \text{ce qui est bien inférieur à } \frac{3}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions $\mathscr{S}$ de (I) est $\mathscr{S} =]-\infty;-2]$

Remarque : On a alors $\ln x < 0 \Longleftrightarrow \ln(x) < \ln(1) \iff x \in]0;1]$.

Exercice(s) du livre : Déclic : 25 à 28 + 32 p 164 (éq et inéq) + 51 + 53 p 166 (proba) + 65 p 167 (suites)

III.2. Continuité et dérivabilité

Théorème 3.

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Preuve **Hors Programme**

Pour démontrer que le logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ (ce qui impliquera qu'elle est continue sur $]0;+\infty[$), on procède en 2 étapes :

1. Montrons que $\ln$ est continue en 1 i.e que $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = \ln 1 = 0$.
   Pour tout $x > -1$, on a

$$e^x \geq x+1 \iff \ln(e^x) \geq \ln(x+1) \iff x \geq \ln(x+1) \iff \mathrm{X}-1 \geq \ln(\mathrm{X})$$

   en ayant posé $\mathrm{X} = x+1$. Donc $0 < \ln \mathrm{X} \leq \mathrm{X}-1$ pour tout $\mathrm{X} > 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0 = \ln 1$. Donc la fonction $\ln$ est continue en 1.

2. Etudions $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h}$ (on considère h assez proche de 0 pour que $\ln(a+h)$ soit défini).

$$\ln(a+h)-\ln a = \ln\left(\frac{a+h}{a}\right) = \ln\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

   Posons $\mathrm{H} = \ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right) \iff e^{\mathrm{H}} = 1+\dfrac{h}{a} \iff h = a(e^{\mathrm{H}}-1)$.

   La fonction $\ln$ étant continue en 1, on a $\lim\limits_{h\to 0} \mathrm{H} = \lim\limits_{h\to 0} \ln\left(1+\dfrac{h}{a}\right) = \ln(1) = 0$.
   D'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \lim_{\mathrm{H}\to 0} \frac{\mathrm{H}}{a(e^{\mathrm{H}}-1)}$$

   Or, $\lim\limits_{\mathrm{H}\to 0} \dfrac{e^{\mathrm{H}}-1}{\mathrm{H}} = 1$. Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(a+h)-\ln a}{h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{a}$.

   La fonction $\ln$ est donc dérivable en tout $a > 0$ et son nombre dérivé est $\dfrac{1}{a}$.

Remarques :

- On retrouve de suite le sens de variation démontré précédemment.
- La tangente à la courbe représentative de la fonction $\ln$ au point $\mathrm{A}(1;0)$ est la droite d'équation

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_1 : y &= \ln'(1)(x-1)+\ln(1) \\ &= 1(x-1)+0 \\ \mathrm{T}_1 : y &= x-1 \end{aligned}$$

⇝ L'approximation affine de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$ au voisinage de 0 est

$$\begin{aligned} \ln(1+h) &\simeq \ln(1) + h\ln'(1) \\ &\simeq 0 + h\frac{1}{1} \\ \ln(1+h) &\simeq h \end{aligned}$$

Ce qui pourrait nous permettre de construire l'allure de la courbe représentative de la fonction Ln grâce à la méthode d'Euler.

Propriété 1.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive alors :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Preuve

On sait que

$$(v \circ u)' = v'(u) \times u'$$

On applique ce résultat pour $v = \ln$.

Exemples :

1. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies par :

   a. $f(x) = \ln(x^2 - 9)$ sur $]3;+\infty[$.

   b. $g(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ sur $]2;+\infty[$

2. Etudier le sens de variation de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+1}$ sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left]\frac{1}{e};+\infty\right[$

Exercice(s) du livre : Déclic : 48 + 49 p 166 + 54 p 166 + 60 à 64 p 169

III.3. Limites

Théorème 4. (Limites aux bornes de son ensemble de définition)

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

Ainsi la représentation graphique de la fonction $\ln$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ mais n'admet pas d'asymptote horizontale.

Preuve

Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^{+*}$. Posons $\mathrm{A} = e^{\mathrm{M}}$, comme la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a :

$$\forall x > \mathrm{A} \Longrightarrow \ln x > \ln \mathrm{A} = \mathrm{M}$$

Quelque soit le réel M, il existe un rang au delà duquel $\ln x \geq \mathrm{M}$, ce qui prouve que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$

De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{x} = -\lim_{x\to+\infty} \ln x = -\infty$$

Exemple :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x^2+5}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{3x^2+5}{x-1}\right)$$

Théorème 5. (Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien)

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

Remarque : On retiendra qu'en $+\infty$ et en 0, toute puissance de x l'emporte sur $\ln(x)$.

Preuve

1. On pose $X = \ln(x)$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a alors que X tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X}$$

Or $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0.$ Donc

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

On en déduit alors pour $n \geq 2$ que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0 \times 0 = 0$$

2. On pose $X = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+ alors X tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\frac{1}{X} = -\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = -0 = 0$$

On en déduit alors pour $n \geq 2$ que

$$\lim_{x\to0^+} x^n \ln x = \lim_{x\to0^+} x^{n-1} \times x\ln x = 0 \times 0 = 0$$

3. $\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$

Exemples :

Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}\ln x \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x \quad ; \quad \lim_{x\to0^+} \ln(x) \times \ln(1-x)$$

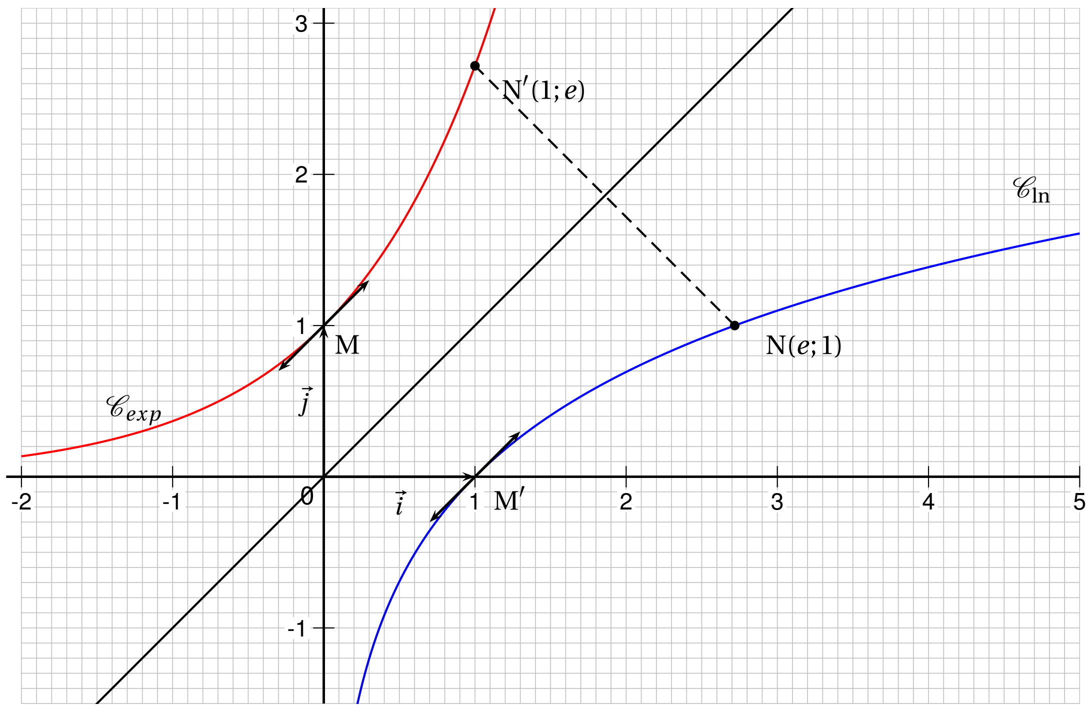
Exercice(s) du livre : Déclic : 33 + 34 p 164 + 55 + 56 + 58 + 59 p 167 + 70 à 74 + 76 (TVI) + 77 à 79 p 169 (suites)

III.4. Représentation graphique

Travail de l'élève **3.** Déclic Activité 2 p 152

Les courbes $\mathscr{C}_{exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (cf DM 7), par conséquent, on peut tracer la courbe représentative de la fonction ln :

x	0		1		e		$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$				$+$			
Variation de $\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice(s) du livre : Déclic : 52-55 p 167 + 80-81-84-85-97-99-100-102 p 171