∽ INTRODUCTION ∽
FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1. Le Radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps. On a pu observé qu'une quantité quelconque de tels noyaux diminue chaque jour d'environ 16.5%.
On aimerait connaître le temps de demi-vie du Radon, ie le temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'une quantité donnée de radon se soit désintégrée de façon naturelle.

Partie A : Modélisation par une suite

Soit R_n la quantité de radon au bout de n jours, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la nature de la suite (R_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer R_n en fonction de n et de R_0.
   En déduire la proportion p_n de noyaux restants au bout de n jours, pour tout $n \geq 0$.
3. Déterminer à l'aide d'un tableau de valeurs le temps de demi-vie en jours du Radon.
4. Quelle critique pouvez-vous faire quant cette modélisation de la situation par une suite ?

Partie B : Modélisation par une fonction

Soit $R(x)$ est la quantité de noyaux de Radon restant au bout de x jours, et $p(x)$ la proportion de noyaux restant au bout de x jours, avec x un réel positif dans les deux cas.
Il paraît alors assez naturel de faire l'hypothèse que, pour toute quantité initiale $R(0)$ de Radon, la quantité $R(x)$ de Radon restant au bout de x jours, avec $x \in \mathbb{R}^+$, est $R(x) = p(x) \times R(0)$, où $p(x)$ est un réel ne dépendant que de x.
On cherche alors à déterminer la forme d'une telle fonction p, si tant est qu'elle existe, pour répondre à la question donnée.
Supposons déjà qu'une telle fonction p existe.

1. **Relation fonctionnelle**
   (a) Justifier que pour tous réels x et y positifs on a
   $$R(x+y) = p(x+y) \times R(0) \qquad \text{et} \qquad R(x+y) = p(y) \times R(x)$$
   (b) En déduire que pour tous réels x et y positifs on a
   $$p(x+y) = p(x) \times p(y) \qquad (*)$$
   $(*)$ s'appelle une relation fonctionnelle.
   On dit que p transforme les sommes en produits.
   (c) Connaissez-vous une telle fonction ? Peut-elle être celle que l'on cherche ?
2. **Vérification de la cohérence avec la partie A.**
   (a) En remplaçant y par 0 dans la relation $(*)$, vérifier que la valeur de $p(0)$ est cohérente avec $(*)$.
   (b) Vérifier que $(*)$ est cohérente avec ce que l'on a déjà trouvé sur les entiers, ie que
   $p(n+m) = p(n)p(m)$ pour tous n et m entiers naturels.

Vous remarquerez que l'on ne peut pas encore répondre à notre problème, qui semble plus compliqué que prévu.
Aussi allons-nous étudier en détails les éventuelles fonctions f vérifiant la relation $(*)$

Exercice 2.

On admet qu'il existe des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et non nulles sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{on a} \quad f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (*)$$

1. **Conséquences directes**
   (a) Démontrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$ alors pour tout réel x, on a $f(x) = 0$.
   En déduire que ces fonctions ne s'annulent jamais.
   (b) Soit x un réel quelconque. En remplaçant y et/ou x par une valeur bien choisie dans $(*)$ démontrer que :
   $$f(0) = 1 \qquad f(x) \geq 0 \qquad f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

2. **Equation différentielle**
   Supposons de plus que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit x un réel quelconque. On pose $g : y \mapsto f(x+y)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) En dérivant la fonction g par rapport à sa variable y, montrer que $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $f'(x) = k \times f(x)$ où k est un réel non nul.

Ceci est vrai pour tout $x \geq 0$, donc la fonction f, si elle existe, est proportionnelle à sa dérivée.
Elle vérifie l'équation différentielle $f' = kf$.

Nous sommes désormais ramener à étudier les éventuelles fonctions f proportionnelles à leur dérivée.

Exercice 3.

1. *L'importance d'une condition initiale*
   Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
   $$f' = f \text{ sur } \mathbb{R}$$
   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$. Démontrer que : $g' = g$ sur $\mathbb{R}$
   (b) Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $f + g$ vérifie la même condition.
   (c) Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions :
   $$(\text{P}) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   i. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par : $c(x) = f(x)f(-x)$ Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
   En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   ii. Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$ [1]

Remarque : Dans cette partie on vient de démontrer que s'il existe une solution alors il en existe une infinité, puis en imposant une condition initiale (ici $f(0) = 1$) s'il existe une solution à notre équation alors elle est unique.

Dans la suite, la fonction f est l'unique solution [2] satisfaisant la condition (P) i.e :

$$(\text{P}) \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la méthode d'Euler.
Exercice 4. On cherche à construire de façon approchée la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une éventuelle fonction dérivable f qui vérifie les conditions

$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

Comme on ne connait pas f, on ne peut pas déterminer l'ordonnée du point M de la courbe ayant pour abscisse x. On utilisera donc la méthode d'Euler pour approximer sa position. Elle consiste à dire qu'une courbe est proche d'une de ses tangentes à proximité du point de tangence.

1. On pourra considérer et dériver la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$
2. On suppose pour le moment qu'une telle fonction existe. La preuve rigoureuse de cette existence sera faite ultérieurement.

1. Construire un repère orthonormé d'unité graphique 10 cm.
2. Quel est le seul point que l'on connait situé sur $\mathscr{C}_f$?
   On prendra donc ce point comme référence dans toutes les questions suivantes.
3. **Avec un pas de** 1
   (a) Quel est le coefficient directeur de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
   (b) Tracer le segment porté par cette tangente pour x variant de 0 à 1.
   (c) Si on assimile $\mathscr{C}_f$ à T_0, quelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?
4. **Avec un pas de** 0.5
   (a) Avec le tracé précédent, quelle approximation de $f(0.5)$ obtient-on ?
   (b) Quel approximation du coefficient directeur de la tangente $T_{0.5}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.5 peut-on en déduire ?
   (c) Quelle nouvelle approximation de $f(1)$ obtient-on ?
5. **Avec un pas de** 0.25
   (a) Avec le tracé de la question **1.**, quelle approximation de $f(0.25)$ obtient-on ?
   (b) Quel approximation du coefficient directeur de la tangente $T_{0.25}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.25 peut-on en déduire ?
   (c) En adaptant la méthode précédente, continuer vos calculs (sans arrondir !) et votre construction pour en déduire une nouvelle approximation de $f(1)$.
6. **Avec un pas de** $h > 0$
   (a) En utilisant la méthode d'Euler, démontrer que
   $$f(h) \simeq 1+h \qquad f(2h) \simeq (1+h)^2 \qquad f(3h) \simeq (1+h)^3$$
   (b) Démontrer finalement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\quad f(nh) \simeq (1+h)^n$
   (c) On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand : $\quad f(x) \simeq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
   C'est la suite $(u_n(x))$ définie par $\quad u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \quad$ *qui sert à démontrer rigoureusement l'existence de la fonction f.*
   (d) A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n égales à 10, 100 et 1000.
   (e) En prenant $n = 1000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *Le nombre $f(1)$ est encore noté e. En fait on a :*
   $$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Conclusion :

Cette fonction f vérifiant les conditions $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est unique et est appelée **fontion exponentielle**.

On la note exp.

On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. nous verrons, dans le cours, que cette fonction possède des propriétés remarquables, notamment évidemment, celle de transformer des « sommes » en « produits », i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall y \in \mathbb{R} \quad : \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$