

~ DEVOIR SURVEILLÉ 1 ~ LES SUITES

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1.

(10 points)

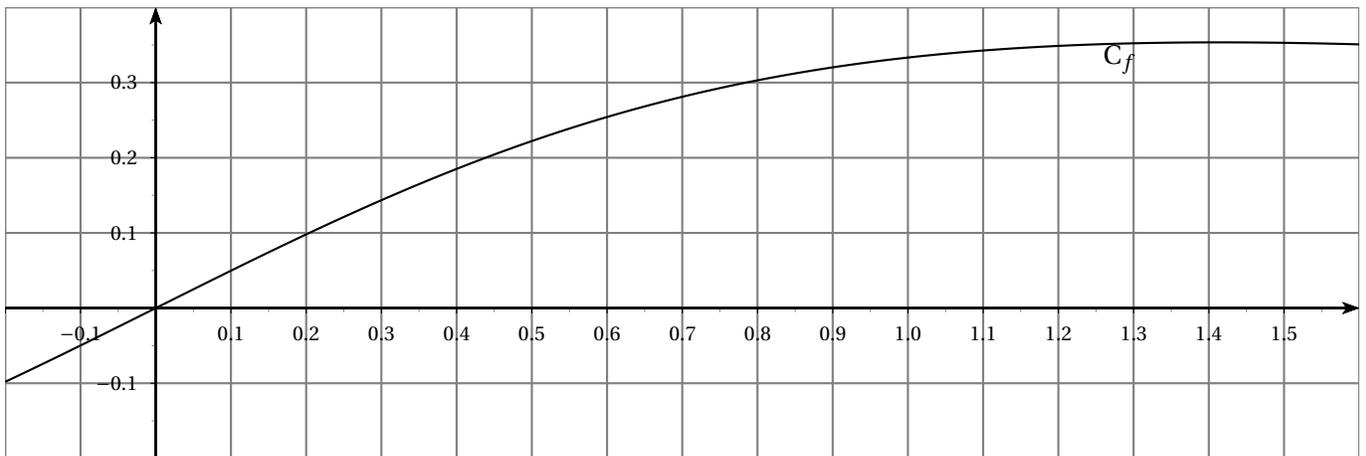
On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n^2} \end{cases}$$

1. (a) Étudier sur $[0; 1]$ les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{2 + x^2}$$

- (b) On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f



- i. Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
- ii. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

- (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(1 + u_n^2)}{2 + u_n^2}$$

- (b) En déduire le sens de variations de la suite (u_n)

3. (a) Justifier que la suite (u_n) converge.

- (b) Résoudre l'équation

$$x = \frac{x}{2 + x^2}$$

- (c) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 2.

(10 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)} \end{cases}$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.

Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	Tant que $n < 9$ Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur ... Fin Tant que
Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

- (a) Vérifier, par le calcul, les valeurs de u_2 et u_3
- (b) Au vu des résultats du tableau, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B - Etude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par :

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, v_n = nu_n - 1$$

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$$

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .
4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Etudier le sens de variation de la suite (u_n) .

BONUS :

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n . On additionne les numéros des pages mais une page a été comptée deux fois. On obtient donc un résultat faux égal à 2012.

Quelle page a été comptée deux fois ?

Quel est le nombre total de pages du livre ?