↫ Devoir Maison 8 ↬
Continuité et TVI.

Tout élève en fera pour au moins deux ♠♠ .

Exercice 1. ♠

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a & \text{si } x \leq 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
2. Déterminer a pour que f soit continue en 2.

Exercice 2. Partie A : Une fonction auxiliaire ♠

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -14x^3 + 21x^2 + 8$$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
2. Etudier les variations de la fonction g.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner un encadrement de α à 0.01 près.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Etude d'une fonction ♠♠

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 1)(7 - 2x)^4$$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
2. Montrer que $f'(x) = (7 - 2x)^3 \times g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et dresser le tableau de variations de f ?
4. Combien l'équation $f(x) = 12$ possède-t-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?
   On ne demande pas de les déterminer.

Exercice 3. ♠♠♠♠

On considèe la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2(2 - x) & \text{si} \quad x \in [0;2[\\ f(2 + x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. (a) La fonction f est-elle continue sur $[0;2]$?
   (b) Etudier les variations de f sur $[0;2]$ puis construire la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f sur $[0;2]$.
   (c) Comment peut-on en déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[2n;2n+2]$ où $n \in \mathbb{Z}$?
2. Démontrer que si $x \in [2n;2n+2]$, alors

$$f(x) = (x - 2n)^2(2n + 2 - x)$$

3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?