∽ DEVOIR MAISON 7 ∾
LIMITES DE FONCTIONS ET COMPOSITION.

Vous traiterez au choix au moins un exercice parmi les trois suivants.

Exercice 1. ♠

1. Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes représentatives des fonctions suivantes :

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

   (b) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

2. Dresser les tableaux de variations des fonctions précédentes sur leur ensemble de définition.

Exercice 2. ♠♠

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

   $$f(x) = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

   $$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ on a $g(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$

   (b) En déduire la limite de g en 2.
4. On considère les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

   $$h(x) = \cos\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad k(x) = \sin\frac{1}{x}$$

   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x)$

   (b) Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$

Exercice 3. ♠♠♠

Une caractérisation des fonctions égales à leur réciproque

On considère une fonction f définie sur un intervalle I telle que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f\circ f(x) = x$$

et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$

1. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par

   $$g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

   (a) Etudier les variations de la fonction g.

   (b) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ on a $g\circ g(x) = x$.

   (c) Contruire la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
2. (a) Montrer que si $\mathrm{M}(x;y) \in \mathscr{C}_f$ alors $\mathrm{M}'(y;x) \in \mathscr{C}_f$.

   (b) En déduire une symétrie de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$.