∾ DEVOIR MAISON 15 ∾
NOMBRES COMPLEXES-EQUATIONS

Tout élève traitera au moins deux exercices.

Exercice 1. ♠

On pose $P(z) = z^3 - (6+i)z^2 + \alpha z - 13i$, où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $P(i) = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z, $P(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 2. ♠♠

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z + z' = 5 \\ zz' = 6.5 \end{cases}$

Exercice 3. ♠♠♠

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

1. Démontrer que (E) a une solution imaginaire pure.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 + az + b)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4. ♠♠♠

On définit la fonction polynôme f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
   On pourra poser $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, puis mettre $f(iy)$ sous forme algébrique et enfin traduire la nullité de $f(iy)$ par un système.
2. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.