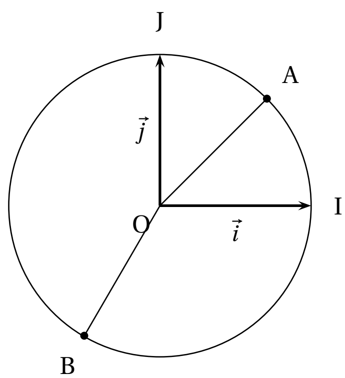
EXERCICES : TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O ci-dessous, les points A et B sont tels que :

$$\widehat{\text{IOA}} = 45^\circ \qquad \text{et } \widehat{\text{IOB}} = -120^\circ$$

Donner une mesure en radians des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OA}})$
2. $(\overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OB}})$
3. $(\overrightarrow{\text{OB}}, \overrightarrow{\text{OA}})$



Exercice 2. Les réels $\dfrac{7\pi}{5}$ et $-\dfrac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures en radians d'un même angle orienté ? Donner la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $-\dfrac{17\pi}{3}$

Exercice 3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{17\pi}{12}$$

Déterminer la mesure de l'angle qui appartient à $]3\pi ; 5\pi]$

Exercice 4. Dans chaque cas, déterminer la mesure principale de l'angle dont on donne une mesure en radians.

1. $\dfrac{5\pi}{4}$
2. $-\dfrac{4\pi}{3}$
3. $-\dfrac{10\pi}{3}$
4. 135π
5. $\dfrac{185\pi}{6}$
6. $\dfrac{17\pi}{13}$

Exercice 5. Calculer la valeur exacte de

1. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$
2. $\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$
3. $\cos\left(\dfrac{79\pi}{6}\right)$

Exercice 6.

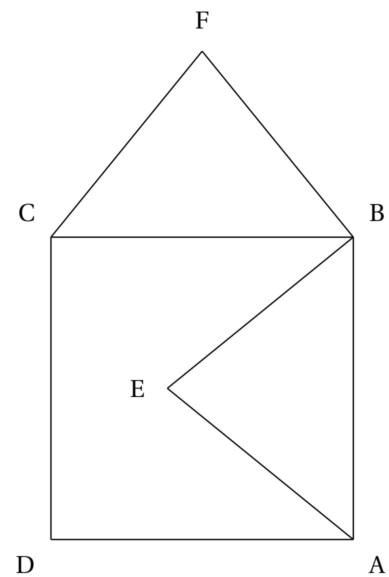
1. Convertir en radian les mesures d'angles suivantes exprimées en degré :

$$15^\circ, \qquad 40^\circ, \qquad 50^\circ, \qquad 63^\circ, \qquad 125^\circ.$$

2. Convertir en degré les mesures suivantes exprimées en radian :

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{3\pi}{10},\quad \frac{11\pi}{12},\quad \frac{\pi}{36},\quad \frac{17\pi}{25}.$$

Exercice 7. ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$
AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})=\frac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB})=\frac{\pi}{3}$
On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés



1. (a) Démontrer que le triangle ADE est isocèle
   (b) Démontrer que $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=\frac{5\pi}{12}$
2. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF})$
3. (a) Utiliser la relation de Chasles pour calculer une mesure de $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$
   (b) Conclure

Exercice 8. Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que :

$$(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\frac{7\pi}{8}\qquad \text{et } (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})=-\frac{3\pi}{5}$$

Déterminer la mesure principale des angles suivants : [1]

1. $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ})$
2. $(\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OB})$
3. $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$

Exercice 9. En utilisant les valeurs remarquables, calculer les réels suivants :

$$\cos\frac{7\pi}{6},\qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\qquad \cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right),\qquad \sin\frac{10\pi}{3}$$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$
2. $\sin x=\sin\frac{\pi}{6}$
3. $\cos x=-\frac{1}{2}$
4. $\sin x=-\cos\frac{\pi}{4}$

Exercice 11. Soit $\theta\in[\pi;2\pi]$ tel que $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ alors on a :

1. $\sin\theta\leq 0$
2. $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$
3. $\sin\theta=0,6$
4. $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

Exercice 12. Soit $\theta\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta=\frac{1}{4}$ alors on a :

1. On pourra utiliser la relation de Chasles

1. $\cos\theta \leq 0$
2. $\cos\theta = \dfrac{3}{4}$
3. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$
4. $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice 13. Sur l'intervalle $[0;2\pi]$, les solutions de l'inéquation $\cos\theta \geq -\dfrac{1}{2}$ sont :

1. $\left[\dfrac{-2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$
2. $\left[\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{4\pi}{3}\right]$
3. $\left[\dfrac{4\pi}{3};2\pi\right]$
4. $\left]0;\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{4\pi}{3};2\pi\right[$

Exercice 14. ABC est un triangle rectangle en A et de sens direct tel que AB = 2AC.
ACD est un triangle isocèle et rectangle en C de sens direct et BAE est un triangle équilatéral direct.

1. Réaliser une figure.
2. Donner, en justifiant, la mesure principale des angles orientés :

   (a) $\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ (b) $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD}\right)$ (c) $\left(\overrightarrow{EA};\overrightarrow{BC}\right)$

Exercice 15. Simplifier le plus possible les expressions :

1. $A = \cos 0 + \cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{3\pi}{4} + \cos\pi$
2. $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 16. A l'aide des propriétés sur les angles associés, calculer la valeur exacte de :

1. $\cos\dfrac{8\pi}{3}$
2. $\sin\left(-\dfrac{18\pi}{4}\right)$
3. $\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)$
4. $\sin\left(-\dfrac{35\pi}{4}\right)$

Exercice 17.

1. Placer au mieux sur le cercle trigonométrique les points repérés par les réels :
$$\frac{2\pi}{7}\ ;\ \frac{4\pi}{7}\ ;\ \frac{6\pi}{7}\ ;\ \frac{8\pi}{7}\ ;\ \frac{10\pi}{7}\ ;\ \frac{12\pi}{7}$$
2. On pose :
$$\mathscr{S} = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}' = \cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}$$
$$\Sigma = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7} \quad \text{et} \quad \Sigma' = \sin\frac{8\pi}{7} + \sin\frac{10\pi}{7} + \sin\frac{12\pi}{7}$$

1. Comparer $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$, puis Σ et Σ'.
2. Calculer Σ et Σ'.

Exercice 18. A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant :

1. $\cos x = \dfrac{1}{2}$ et $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi;\pi]$.
2. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi;3\pi]$.
4. $\cos x = 0$ et $\sin x = -1$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 19.

1. θ est un angle situé dans $]-\pi;\pi]$ dont on sait que $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Que vaut θ (en radians) ?
2. θ est un angle de $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ tel que $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$. Calculer $\cos\theta$ et $\tan\theta$
3. θ est un angle de $]-\pi;0]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$. Calculer $\sin\theta$ et $\tan\theta$
4. θ est un angle de $]-\pi;0]$ tel que $\tan\theta = 2$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Exercice 20. Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D$ où $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$. En déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{9\pi}{8}$.
2. Démontrer que pour $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ puis de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{8}$

Exercice 21. Dans cet exercice on donne : $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

1. Soit $x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que :
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$
2. En déduire que :
$$\tan\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$$

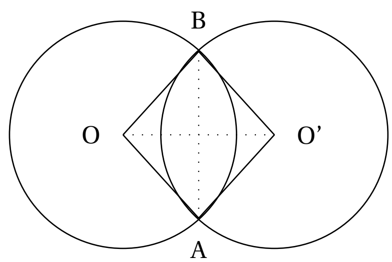
Exercice 22. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle I

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad I =]-\pi;0]$
2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad I = [0;2\pi[$
3. $\sin x = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ $\quad I = \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$
4. $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\quad I = [0;2\pi[$

Exercice 23. $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O′ et de même rayon $r = 2$ cm.

On suppose que ces deux cercles se coupent en deux points A et B avec $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{3}$

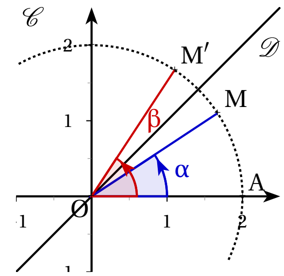
1. Quelle est la nature du quadrilatère OAO′B
2. Calculer la distance OO′ et la distance AB
3. Calculer le périmètre et l'aire de la surface d'intersection des deux disques (délimité par les deux arcs $\overset{\frown}{AB}$)



Exercice 24. Soit a un nombre réel quelconque.
Démontrer que l'équation trigonométrique d'inconnue x, $\cos x = \cos a$, admet au moins une solution supérieure ou égale à 100.

Exercice 25. Soit le point A(2;0) dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé d'origine O, M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O qui passe par A et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.
On considère M′ le symétrique du point M par rapport à d.
Posons α une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ et β une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM'}\right)$.
Montrer que, quelle que soit la position de M sur $\mathscr{C}$, on a :

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$$

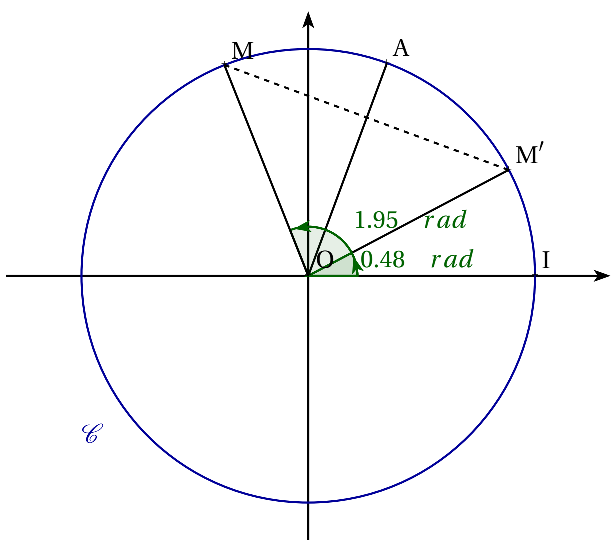


Exercice 26. Un élève propose deux nouvelles formules à ajouter aux formules trigonométriques classiques :

$$\cos 2a = 2\cos a \qquad \text{et} \qquad \sin 2a = 2\sin a$$

Ces deux formules sont-elles :
- vraies pour tout nombre réel a ?
- vraies pour quelques valeurs de a ? Si oui, lesquelles ?
- fausses pour toute valeur de a ?

Exercice 27. **Géogébra**
On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct (O, I, J). On place sur ce cercle un point A associé au réel α, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}\right) = \alpha \quad [2\pi]$ et un point M associé au réel x.
On construit le point M′ symétrique de M par rapport à la droite (OA). On appelle x' un réel associé à M′.[2]
Le but de cet exercice est de trouver une relation entre les nombre x, x' et α.



1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique et, pour une valeur de α fixée qu'on choisira, faire bouger le point M.
2. Pour chaque position de M, noter la valeur de x et celle de x'.
   Conjecturer une relation entre x, x' et α.
3. Reprendre les deux questions précédentes avec une autre valeur de α.

2. On admettra qu'une symétrie axiale transforme un angle orienté en un angle orienté de mesure opposé.

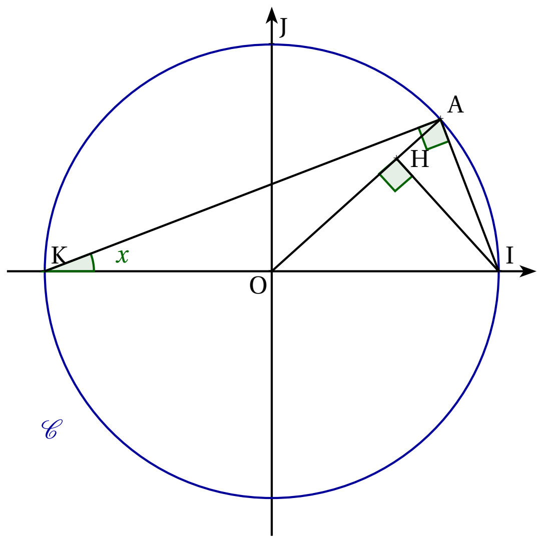
4. Démontrer la conjecture.

Exercice 28. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(-2\sqrt{3};-2)$ et $B(-3;3\sqrt{3})$. Construire les points A et B [3]

Exercice 29. Soit $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.
Déterminer une équation de la sphère de centre O, passant par $A(1;2;3)$

Exercice 30. On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé direct (O,I,J), le point K de coordonnées $(-1,0)$ et un réel x.
On place sur le cercle le point A tel que $\left(\overrightarrow{KI};\overrightarrow{KA}\right)=x$.
Le but de ce problème est de démontrer l'égalité :

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$



1. On suppose dans cette question que $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
   La perpendiculaire à [0A] passant par I coupe la droite (OA) en H.
   (a) Démontrer que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=2x$.
   (b) Démontrer que $\sin 2x = IH$
   (c) Démontrer que l'aire du triangle rectangle AKI est égale à $2\sin x\cos x$.
   (d) Démontrer que les triangles AKO et AOI ont la même aire égale à $\frac{IH}{2}$.
   (e) Conclure.
2. On suppose dans cette question que $x \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.
   On pose $x' = x - \frac{\pi}{2}$.
   (a) Démontrer que $\sin 2x' = 2\sin x'\cos x'$.
   (b) En déduire que l'on a encore $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
3. On suppose dans cette question que $x \in [-\pi;0]$ et on pose $x'' = -x$.
   (a) Démontrer que $\sin 2x'' = 2\sin x''\cos x''$.
   (b) En déduire que l'on a encore $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
   On a ainsi démontré que cette égalité est vraie pour tout réel x de l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
4. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$

3. Calculer un couple de coordonnées polaires de chacun des points et utiliser les deux sortes de coordonnées pour les placer avec précisions

Exercice 31. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$
2. $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}$
3. $\sin(2\theta) = \cos\theta$

Exercice 32. **Algorithme**

PARTIE A.

On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: a et $tour$ sont deux nombres réels
Entrer a
$tour := 2\pi$
Tant que ($a > \pi$) **Faire**
  $a := a - tour$
Fin Tant que
Afficher a

1. (a) Indiquer la sortie de cet algorithme pour les valeurs de a en entrée suivantes : 0, π, 3π et 10.
   (b) Que fait l'algorithme ?
   (c) Indiquer la sortie de l'algorithme pour $a = -3\pi$.
2. (a) Modifier l'algorithme pour qu'il donne la mesure principale d'un angle de mesure a.
   (b) Programmer l'algorithme modifié à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel.

PARTIE B.

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels quelconques.

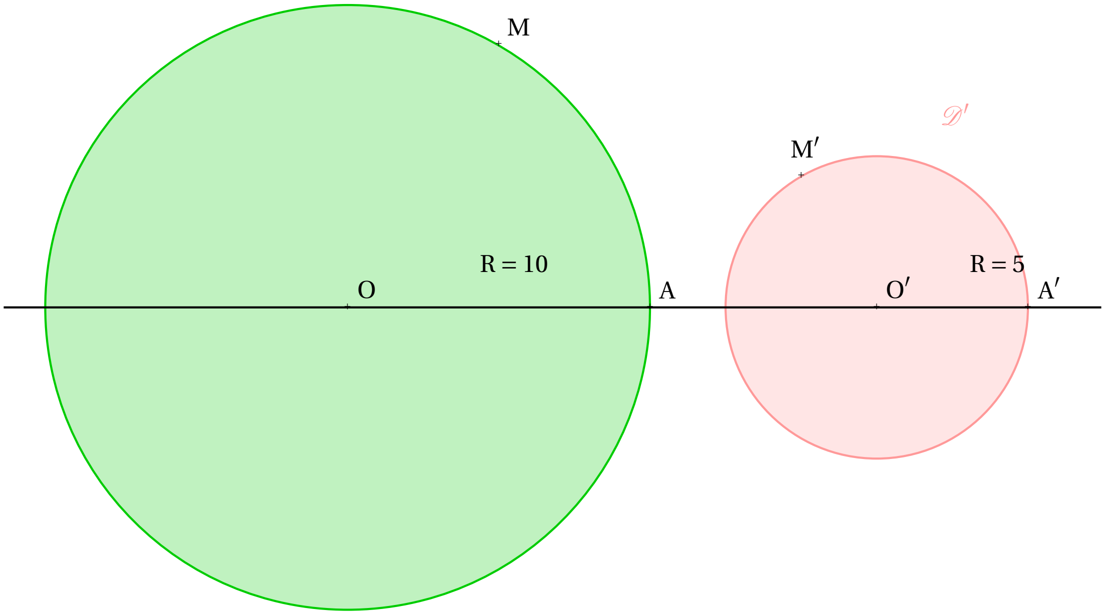
1. Proposer un algorithme qui, à partir d'une mesure a en radians d'un angle, donne toutes les mesures de cet angle qui appartiennent à l'intervalle $[x_1 ; x_2]$.
2. Programmer cet algorithme.

Exercice 33. Un escargot se déplace dans un potager rectangulaire de dimensions $3\ m \times 4\ m$.
Un repère orthonormé (O, I, J) est tracé sur le sol tel que :

- O est le centre du potager ;
- $\overrightarrow{OI}$ a pour direction la longueur du potager ;
- le plan est orienté.

L'escargot part de O et avance à la vitesse de $6 cm.min^{-1}$ en suivant l'axe des abscisses dans le sens positif pendant 1 minute, puis tourne d'un angle de $\dfrac{\pi}{45}$. Il poursuit son chemein pendant 1 minute, tourne encore et ainsi de suite. Arrivera-t-il sur une des clôtures en moins de 2 heures ?

Exercice 34. Deux disques $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, de rayons R et R′, tounent dans le même sens autour de leur centre respectif O et O′. M et M′ sont deux points de la circonférence de ces disques. A l'instant $t = 0$, M et M′ sont respectivement en A et A′. On admet qu'à chaque instant les points M et M′ ont parcouru des distances identiques.



Le but de ce problème est de voir si M et M′ peuvent se retrouver dans la même position à un moment ou un autre.

PARTIE A.

1. Soit x et x' le nombre de tours effectués respectivement par le disque $\mathscr{D}$ et par le disque $\mathscr{D}'$ à un instant donné t.
   (a) Montrer qu'à l'instant t la distance parcourue par le point A est $2\pi x\mathrm{R}$.
   (b) Montrer que $2\pi x\mathrm{R} = 2\pi x'\mathrm{R}'$.
   (c) Que représentent les nombres $2\pi x\mathrm{R}$ et $2\pi x'\mathrm{R}'$ pour les angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}'};\overrightarrow{\mathrm{OM}'}\right)$?
2. Supposons qu'à l'instant t le point M se trouve en A et le point M′ se trouve en A′.
   (a) Montrer qu'il existe alors deux entiers naturels k et k' tels que $2\pi x\mathrm{R} = 2\pi k\mathrm{R}$ et $2\pi x'\mathrm{R}' = 2k'\pi\mathrm{R}'$.
   (b) En déduire qu'il existe alors deux entiers naturels k et k' tels que $k\mathrm{R} = k'\mathrm{R}'$.
3. Réciproquement, supposons qu'il existe deux entiers naturels k et k' tels que $k\mathrm{R} = k'\mathrm{R}'$. Démontrer qu'il existera un instant $t \neq 0$ où les points M et M′ de ces deux disques se trouveront en même temps respectivement en A et A′.

PARTIE B.

Dans chacun des cas suivants, indiquer après combien de tours les points M et M′ se trouveront en A et A′ pour la première fois.

1. $\mathrm{R} = 10$ et $\mathrm{R}' = 5$.
2. $\mathrm{R} = 12$ et $\mathrm{R}' = 18$.
3. $\mathrm{R} = 1$ et $\mathrm{R}' = \sqrt{2}$.

PARTIE C.

Considérons la situation où $\mathrm{R} = 12$ et $\mathrm{R}' = 18$. Mais cette fois-ci à l'instant 0, le disque de rayon R a un quart de tour d'avance sur le disque de rayon R′.
Est-il possible que les points M et M′ se trouvent respectivement en A et A′ un peu plus tard ?