EXERCICES : LOI BINOMIALE

I. Exercice sur la loi binomiale

Exercice 1. On a observé le nombre d'accidents de scooters à un carrefour dangereux.
Pour n scooters franchissant le carrefour durant une journée, on admet que la variable aléatoire S qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant la journée suit une loi binomiale telle que $E(S) = 0,1$.

1. Calculer la probabilité p (en fonction de n) d'être accidenté pour un scooter franchissant le carrefour pendant la journée considérée.
2. Pour tout entier naturel k, $0 \leq k \leq n$, exprimer la probabilité de l'événement $(S = k)$ en fonction de n et de k.
3. **Application** : Sachant que 100 scooters ont franchit le carrefour lors d'une journée de printemps, quelle est la probabilité :
   (a) qu'aucun scooter n'ait été accidenté.
   (b) que moins de deux scooters n'ait été accidenté.

Exercice 2. Dans le métro, il y a 9% des voyageurs qui fraudent. Chaque jour, à la station alésia, on contrôle 200 personnes. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraudeurs sur ces 200 personnes. On admet que X suit une loi binomiale.

1. Déterminer les paramètres de la loi que suit X.
2. Combien de personnes, en moyenne, vont être signalées en fraude lors de ce contrôle ?
3. Si le prix du ticket est de 1,70 €, quel doit-être le prix de l'amende pour, qu'en moyenne, l'établissement régissant le métro ne perde pas d'argent avec les fraudeurs de la station Alésia, sachant qu'il y a 5000 voyageurs chaque jour dans cette station.

Exercice 3. chaque crocodile qui traverse la clairière séparant les kékés du fleuve a une probabilité $1/3$ de périr écrasé par un éléphant sautant en parachute. Un matin, 32 crocodiles quittent les kékés pour rejoindre le fleuve. On note X, le nombre de victimes des éléphants parmi ces crocodiles. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre total de victimes.

1. Calculer la probabilité que 22 crocodiles se baignent (sans périr) dans le fleuve.
2. Calculer la probabilité que 7 crocodiles retournent sains et saufs le soir dans les kékés.
3. Calculer $E(Y)$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 4. Le ministre syldave de l'Éducation décide de donner le bac à 80% des enfants dès leur naissance. C'est vrai ! Pourquoi attendre 18 ans et dépenser tant d'argent quand on est même pas sûr du résultat, tout ça pour permettre à des profs d'être payés à être en vacances la moitié de l'année ?
Le ministre découpe donc dans du carton dix carrés numérotés de 1 à 10 et propose au nouveau-né de tirer un carton au hasard.

– si c'est un multiple de cinq, il est recalé,
– si c'est un sept,il obtient la mention « très bien »,
– si c'est un multiple de quatre, il obtient la mention « bien »,
– si c'est un multiple de trois, il obtient la mention « assez bien »
– sinon, il obtient la mention « passable ».

1. Calculer la probabilité pour un nouveau-né syldave d'obtenir le bac avec la mention « passable ».
2. Le village natal du beau-frère du ministre attend sept naissances pour l'année qui suit. On sait qu'il y aura trois filles et quatre garçons [1]. On note X la variable aléatoire égale au nombre de garçons bacheliers et Y la variable aléatoire égale au nombre de filles bachelières parmi ces bébés.

1. Comme chacun sait, la capitale syldave s'appelle Gattaca

(a) Déterminer les lois de probabilité de X et Y.

(b) Compléter les deux tableaux suivants :

X	0	1	2	3	4	Total
$p(X=k)$	0.0016	……	……	……	……	1

Y	0	1	2	3	Total
$p(Y=k)$	0,008	……	……	……	1

(c) Calculer la probabilité d'avoir plus de bachelières que de bacheliers. (on pourra s'aider d'un arbre)

(d) Calculer la probabilité pour que ce village dépasse l'objectif du ministre.

Exercice 5. Suite à une étude démographique de la Syldavie, on estime que la probabilité pour qu'un Syldave interrogé au hasard ne connaisse pas par cœur les œuvres du GGC (Grand Guide Charismatique) est de p.
On a classé la population en m groupes de n Syldaves. On va comparer deux stratégies pour détecter les traitres incultes dans chaque groupe :

– la première consiste à interroger les syldaves un par un ;
– on suppose que les services de renseignements syldaves ont mis au point un test rapide permettant de vérifier de manière globale si un groupe contient au moins un traitre. Si ce test global est positif, alors on interroge un a un ses membres pour identifier les traitres, sinon, on passe au groupe suivant.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de traites et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de groupe comportant au moins un traite.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance.
2. (a) On considère un groupe de n syldaves (Z est la variable aléatoire qui compte le nombre de traitre dans ce groupe), démontrer que la probabilité qu'au moins un syldave soit un traitre vaut :

$$p(Z \geq 1) = 1-(1-p)^n$$

   (b) Expliquer pourquoi $Y \hookrightarrow B(m; 1-(1-p)^n)$.

II. Deux exercices type BAC

Exercice 6. *Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions A, B ou C est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
Une réponse exacte rapporte 0,5 *point . (Une réponse inexacte enlève* 0,25 *point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*
Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.
Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires.

1. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.
   (a) La probabilité de tirer 3 boules noires est :
   A. $\frac{1}{56}$ B. $\frac{1}{120}$ C. $\frac{1}{3}$
   (b) La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :
   A. $\frac{11}{56}$ B. $\frac{11}{120}$ C. $\frac{16}{24}$
2. On tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.
   (a) La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :
   A. $\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$ B. $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ C. $\left(\frac{1}{5}\right)^5$

(b) La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

A. $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$ B. $2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{3}{8}$ C. $10 \times \left(\frac{5}{8}\right)^3 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2$

3. On tire successivement et sans remise deux boules dans cette urne. On note :
   - R_1 l'évènement : « La première boule tirée est rouge » ;
   - N_1 l'évènement : « La première boule tirée est noire » ;
   - R_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est rouge » ;
   - N_2 l'évènement : « La deuxième boule tirée est noire ».

   (a) La probabilité d'obtenir une boule rouge au second tirage sachant qu'on a obtenu une boule rouge au premier tirage est :

   A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{14}$

   (b) La probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_2$ est :

   A. $\frac{16}{49}$ B. $\frac{15}{64}$ C. $\frac{15}{56}$

   (c) La probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage est :

   A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{5}{7}$ C. $\frac{3}{28}$

   (d) La probabilité de tirer une boule rouge au premier tirage sachant qu'on a obtenu une boule noire au second tirage est :

   A. $\frac{15}{56}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{7}$

Exercice 7. Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.
Les boules sont indiscernables au toucher.
Une partie se déroule de la façon suivante :
le joueur lance le dé,
- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :
A : « Le dé amène le numéro 1. »
B : « Le dé amène un multiple de trois. »
C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »
N : « La boule tirée est noire. »

1. Le joueur joue une partie.

   (a) Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\frac{5}{3k}$.

   (b) Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

   (c) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

   (d) Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\frac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\frac{1}{30}$.
   Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.
   Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

III. Reconnaître une situation modélisable par la loi binomiale

Exercice 8. Dans lequel des cas suivants X est-elle une variable binômiale ? Donnez quand c'est possible les paramètres de la loi ainsi que l'espérance.

1. Dans une classe on tire au sort et sans remise 5 élèves, X est le nombre d'élèves abonné à Star'Ac mag dans le lot tiré au sort.
2. Dans un sac de 20 billes contenant 7 noires et 13 blanches, on tire avec remise 3 d'entre elles, X étant le nombre de billes noires obtenues.
3. On lance 10 dés, X est le nombre de « 5 » obtenus.
4. Un circuit comprend 32 lampes en série, pour chacune d'elle, la probabilité qu'elle fonctionne est de $3/100$, X est le nombre de lampes qui s'allument lorsqu'on appuie sur l'interrupteur. Même exercice avec cette fois des lampes en parallèle.

Exercice 9. Après le lycée, l'université : le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca est un ancien boxeur, aveugle et parkinsonien. Il arrache les dents de ses patients au hasard. Les syldaves venant le consulter ont toujours une seule dent de malade parmi les trente-deux qu'ils possèdent encore avant l'intervention des tenailles ou des poings, c'est selon. On considère les dix premiers clients, en notant X le nombre de dents malades extraites à bon escient.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer la probabilité pour qu'aucun de ces patients n'y laisse la dent malade.
2. Combien doit-il traiter de personnes pour extraire au moins une dent malade avec une probabilité supérieure à 0,6 ?
3. Le dernier client est assez obstiné : il se laisse arracher les dents une à une tant que la dent malade n'a pas été extraite. On note Y le nombre de dents saines que ce vaillant patriote voit tomber des mâchoires de la redoutable paire de tenailles.
   (a) Calculer la probabilité pour qu'il reparte complètement édenté
   (b) Calculer la probabilité pour qu'il ne lui reste plus qu'une dent.
   (c) Calculer E(Y).

,

IV. Algorithme

Exercice 10. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 :

Données: A, i et C sont des nombres entiers naturels.
C := 0
Pour i allant de 1 à 9 **Faire**
  A prend la valeur d'un nombre entier aléatoire entre 1 et 7
  Si $(A > 5)$ **Alors**
    $C := C + 1$
  Fin Si
Fin Pour
Afficher C.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre affiché par cet algorithme.

1. Quelle loi suit X ? Donner ses paramètres.
2. Que faut-il changer dans le programme pour que les paramètres de la loi suivie par X soient 10 et 0.2 ?
3. Programmer cet algorithme sur votre calculatrice ou sur un ordinateur.

Exercice 11. Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle $[1 ; 50]$
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Algorithme 2 :

Données: a, b, c, d, e sont des variables du type entier
$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Tant que $((a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e))$ **Faire**
  $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;
  $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;
  $e :=$ rand(1, 50)
Fin Tant que
Afficher a, b, c, d, e

   (a) Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
   $L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
   $L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

   (b) Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.
4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

   (b) On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

   - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - il n'a pas été contrôlé ;
   - il a été contrôlé au moins une fois.

V. TP

V.1. Hasard et QCM

Objectif : Etudier, pour une situation modélisable par un schéma de Bernoulli, des variables aléatoires qui suivent ou non une loi binomiale. Un QCM (Questionnaire à Choix Multiples) est composé de 10 questions numérotées de 1 à 10. Pour chacune d'elles, quatre réponses possibles sont proposées, dont une seule est exacte.
La difficulté réside dans le fait que ce QCM Syldave est en chinois, et que notre candidat Fabrice ne lit pas le chinois (bien qu'il le parle couramment, évidemment). Il se voit donc obligé de répondre à chaque question au hasard, de façon indépendante (Fabrice déteste ne pas répondre du tout, il veut tenter sa chance coûte que coûte).
PARTIE A.

1. (a) Justifier que la méthode de Fabrice pour répondre à une question est une épreuve de Bernoulli. Préciser le succès et la probabilité qu'il se réalise.
   (b) Que peut-on dire de l'expérience de Fabrice sur le QCM entier ?
2. **Temps d'attente de la première bonne réponse**
   On désigne par X la variable aléatoire donnant le numéro de la première question à laquelle Fabrice répond juste. On convient que X prend la valeur 11 si toutes les réponses sont fausses.
   (a) Préciser quelles valeurs peut prendre X.
   (b) Calculer $P(X = 11)$ et $P(X = k)$ pour $1 \leq k \leq 10$
   (c) X suit-elle une loi binomiale ?
3. **Attribution d'une note**
   On décide de donner à Fabrice un point par réponse exacte. Soit Y la variable aléatoire associant aux réponses de Fabrice sa note obtenue sur 10.
   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
   (b) Sur la calculatrice ou le tableur, obtenir les valeurs arrondies à 10^{-6} de $P(Y = k)$ pour $0 \leq k \leq 10$. Les présenter dans un tableau, puis sous la forme d'un histogramme.
   (c) Quelle est la probabilité que Fabrice obtienne la note maximale ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins la moyenne ?
   (e) Quelle est la note la plus probabilité de Fabrice ?
   (f) Quelle note Fabrice peut-il espérer obtenir (ie quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM de ce type)
4. Pour pénaliser les candidats qui ne comptent que sur le hasard comme Fabrice, le gouvernement Syldave décide de toujours accorder 1 point par réponse exacte, mais cette fois d'enlever 0.2 point par réponse fausse.
   (a) Prouver qu'avec cette nouvelle règle, la variable aléatoire Z donnant la note obtenue par Fabrice s'exprime par $Z = 1,2Y - 2$
   (b) En déduire la probablité que Fabrice obtienne une note négative, puis une note supérieur à 5.
   (c) Quelle note Fabrice peut-il espérer obtenir ? L'objectif vous paraît-il atteint ?

PARTIE B.

On suppose que n candidats ($n \in \mathbb{N}^*$) répondent à ce QCM et qu'aucun d'entre eux ne lisant le chinois, ils suivent tous la méthode de Fabrice et sans copier.

1. Quelle est la probabilité P_n qu'au moins un candidat obtienne la note 10 ?
2. Pour quelles valeurs de n cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieur à 0.99 ?

Loi Binomiale à la calculatrice

Pour calculer P(X = k) :

- **TI 82-83-84** : Taper 2nde + var puis descendre avec ▼ et choisir `0:binomFdp`
  Il s'affiche `binomFdp(` que vous devez compléter par les valeurs `n,p,k)`
- **TI 89** : Taper CATALOG + F3 puis se déplacer avec ▼ et ▲ et choisir `binomDdP`
  Il s'affiche `TIStat.binomDdP(` que vous devez compléter par les valeurs `n,p,k)`
- **TI Nspire CX CAS** : Taper CATALOG + 2 puis se déplacer avec ▼ et ▲ et sélectionner `Probabilités` que l'on ouvre avec enter
  Ensuite, sélectionner `Distributions`, que l'on ouvre avec enter, et enfin choisir `Binomiale DdP`
  Il s'affiche `binomPdf()` que vous devez compléter par les valeurs `n,p,k`
- **Casio** : Dans MENU, choisir l'icône `STAT`, puis `DIST>BINM BPD`
  `Numtrial` correspond au paramètre n.

Pour calculer P(X ≤ k) : Même méthode, il suffit de choisir à la fin :

- **TI 82-83-84** : `A:binomFRép`
- **TI 89** : `binomFdR`
- **TI Nspire CX CAS** : `Binomiale FdR`
- **Casio** : `DIST>BINM?`
  `Numtrial` correspond au paramètre n.

Loi Binomiale à la calculatrice

Pour calculer P(X = k) :

- **TI 82-83-84** : Taper 2nde + var puis descendre avec ▼ et choisir `0:binomFdp`
  Il s'affiche `binomFdp(` que vous devez compléter par les valeurs `n,p,k)`
- **TI 89** : Taper CATALOG + F3 puis se déplacer avec ▼ et ▲ et choisir `binomDdP`
  Il s'affiche `TIStat.binomDdP(` que vous devez compléter par les valeurs `n,p,k)`
- **TI Nspire CX CAS** : Taper CATALOG + 2 puis se déplacer avec ▼ et ▲ et sélectionner `Probabilités` que l'on ouvre avec enter
  Ensuite, sélectionner `Distributions`, que l'on ouvre avec enter, et enfin choisir `Binomiale DdP`
  Il s'affiche `binomPdf()` que vous devez compléter par les valeurs `n,p,k`
- **Casio** : Dans MENU, choisir l'icône `STAT`, puis `DIST>BINM BPD`
  `Numtrial` correspond au paramètre n.

Pour calculer P(X ≤ k) : Même méthode, il suffit de choisir à la fin :

- **TI 82-83-84** : `A:binomFRép`
- **TI 89** : `binomFdR`
- **TI Nspire CX CAS** : `Binomiale FdR`
- **Casio** : `DIST>BINM?`
  `Numtrial` correspond au paramètre n.

V.2. Méthode du poolage

Objectif : Etudier une méthode utilisée par exemple pour les tests sanguins

La méthode de poolage est utilisée dans la détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donnée de N individus tirés au sort de façon indépendante, dans une population très vaste par rapport à N (ce qui permet de considérer que le tirage est équivalent à un tirage avec remise).
La proportion de porteurs du parasite dans la population est p $(0 < p < 1)$.
On dispose d'un test permettant de savoir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat du test étant dit positif dans le premier cas, négatif dans le second.
Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin.
La méthode de poolage consiste à répartir les N prélèvements par groupes de n prélèvements $(n < \mathrm{N})$.
On mélange les prélèvements des n individus et on teste ces mélanges.
Si le mélange est positif dans un des groupes, on teste le prélèvement de chaque individu du groupe concerné.
La question est de savoir dans quelles conditions le poolage permet d'économiser des tests par rapport au fait de tester chacun des N prélèvements.

PARTIE C. **Etude d'un cas particulier**

On prend $\mathrm{N} = 60$ et on fait 20 groupes de 3, que l'on numérote de 1 à 20.
Pour chaque groupe i (i entier de 1 à 20), on note H_i le mélange des prélèvements des trois individus du groupe.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de groupes pour lesquels le test de H_i est négatif.
Soit T la variable aléatoire qui correspond au nombre total de tests effectués.

1. Justifier que la probabilité que le test de H_i soit négatif est $(1-p)^3$.
2. Quelle est la loi de la variable X ? En déduire son espérance mathématique.
3. Prouver que $\mathrm{T} = 80 - 3\mathrm{X}$ et en déduire l'espérance mathématique de T en fonction de p.
4. Le nombre de tests à effectuer étant de 60 lorsque l'on teste les prélèvements de chaque individu, on considère que le poolage est rentable si E(T) est inférieur ou égal à 60.
   (a) Justifier que $\mathrm{E(T)} \leq 60 \iff \dfrac{1}{3} - (1-p)^3 \leq 0$
   (b) Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{3} - (1-x)^3$.
   (c) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution, puis en déterminer une valeur approchée à 0,1 près. *On pourra utiliser un tableau de valeurs*
   (d) Conclure en précisant pour quelles valeurs de p la méthode du poolage est rentable.

PARTIE D. **Autre cas particulier**

On a toujours $\mathrm{N} = 60$, mais cette fois, on fait 15 groupes de 4, que l'on numérote de 1 à 15.
En s'inspirant de la méthode précédente, préciser pour quelles valeurs de p ce poolage est rentable.

PARTIE E. **Un problème d'optimisation**

Si N est le nombre d'individus, on fait $\dfrac{n}{n}$ groupes de n individus (on suppose que N est assez grand devant n pour négliger le fait qu'un groupe pourrait ne pas être complet).
La démarche et les notations restent celles de la partie A.

1. Déterminer la loi suivie par X.
2. Exprimer T en fonction de X, puis déduire que $\mathrm{E(T)} = \mathrm{N}\left(1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n\right)$
3. Montrer que E(T) est minimal si et seulement si $1 + \dfrac{1}{n} - (1-p)^n$ est minimale.
4. Pour chacune des valeurs suivantes de p : $0,1$; 0.01 et 0.001 déterminer à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur la valeur de n telle que E(T) soit minimale.
5. Vérifier dans chacun de ces cas que le poolage est rentable.

V.3. Affaire Castaneda contre Partida

Des arguments de type probabiliste peuvent être avancés et pris en compte dans les cours de justice. En novembre 1976, Rodrigo Partida, d'originie mexicaine, était condamné à huit ans de prison pour vol et tentative de viol dans un comté du sud du Texas. Il attaqua le jugement sous motif que la désignation des jurés dans l'Etat du Texas était discriminatoire pour les Américains d'origine mexicaine. Son argument était que ceux-ci n'étaient pas suffisamment représentés dans les jurys populaires.

Attendu de la Cour Suprême des Etats-Unis (affaire Castaneda contre Partida)

« Si les jurés étaient tirés au hasard dans l'ensemble de la population, le nombre d'américains mexicains dans l'échantillon pourrait alors être modélisé par une distribution binomiale ...
Etant donnée que 79.1% de la population est mexico-américaine, le nombre attendu d'américains mexicains parmi les 870 personnes convoquées en tant que grands jurés pendant la période de 11 ans est approximativement de 688. Le nombre observé est 339.
Bien sûr, dans n'importe quel tirage considéré, une certaine fluctuation par rapport au nombre attendu est prévisible. Le point essentiel, cependant, est que le modèle statistique montre que les résultats d'un tirage au sort tombent vraisemblablement dans le voisinage de la valeur attendue ...
La mesure des fluctuations prévues par rapport à la valeur attendue est l'écart-type, défini pour la distribution binomiale comme la racine carré de la taille de l'échantillon (ici 870) multiplié par la probabilité de sélectionner un américain mexicain (ici 0.791) et par la probabilité de sélectionner un non américain mexicain (ici 0.209) ... Ainsi, dans ce cas, l'écart-type est approximativement de 12.
En règle générale, pour de si grands échantillons, si la différence entre la valeur attendue et le nombre observé est plus grande que deux ou trois écarts-types, alors l'hypothèse que le tirage du jury était au hasard serait suspecte à un spécialiste des sciences humaines.
Les données sur 11 années reflètent ici une différence d'environ 29 écarts-types. Un calcul détaillé revèle qu'un éloignement aussi important de la valeur attendue se produirait avec moins d'une chance sur 10^{140}. »
Source : « *Prove it with Figures (Statistics for Social Science and Behaviour Sciences)* », Hans Zeisel et David Kaye ; Springer (2006)

1. Définir la variable aléatoire X qui, dans cette situation, suit une loi binomiale. Donner ces paramètres.
2. A quel calcul correspond la valeur 688 ?
3. Effectuer le calcul de l'écart-type de X. A quoi correspond la « différence de 29 écarts-types » ?
4. A quel événement correspond la probabilité de 10^{-140} ? Faites le calcul à l'aide d'un tableur. Etes-vous d'accord ?
5. Peut-on considérer que la consitution des jurys résultait du hasard ?
6. La cour d'appel a donc finalement donné raison à la défense Partida. Cependant, elle exclut une démonstration mathématique de discrimination raciale. N'allez pas croire qu'il y ait eu un complot !
   Quel critique pouvez-vous faire sur la modélisation ? Qu'est-ce qui peut justifier une telle composition de jury ?

Il est alors aussi de notre responsabilité d'être critique à l'égard des chiffres sur lesquels toute la simulation repose.

« Alors que 79, 1% de la population de comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoqués pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine. »

Que signifie : « lors d'une certaine période de référence » ? En réalité, cette période de référence correspond à l'étude des listes des jurés lors des 11 années qui ont précédé le jugement de Partida. Sur ces listes, 339 citoyens d'origine mexicaine ont été comptabilisés sur 870. Or, non seulement il n'est pas raisonnable de penser que durant cette longue période la proportion de citoyens d'origine mexicaine est resté constante et égale à 79, 1% mais en plus sur la période de deux ans et demi précédent le jugement de l'affaire opposant le shérif Castaneda au prévenu Partida, la proportion de citoyens d'origine mexicaine ayant été membre d'un jury dans ce même comté était d'environ 56%. Cet argument a été soutenu par l'accusation sans succès car la sous représentation des citoyens d'origine mexicaine restait trop importante.

Une deuxième piste pour contredire la thèse du complot repose sur l'étude des modalités de sélection des jurés. D'abord des listes de citoyens sont éditées de manière aléatoire mais ensuite, conformément à la loi, le juge du comté vérifie que le citoyen est alphabétisé et de « bonnes mœurs ». Ainsi, la loi elle-même impose une sous représentation d'une partie de la population qui est moins alphabétisée.

Enfin, il faut remarquer que la cour suprême ne conclut pas à la démonstration formelle de discrimination raciale. Elle précise, en effet : « Etant donné les nombreuses facettes de la motivation humaine, il serait peu approprié de prendre comme loi établie que des humains appartenant à un groupe ne pratiqueront pas de discrimination à l'égard des membres d'un autre groupe ».

V.4. Loi géométrique tronquée

Le « président » de Syldavie pense que les filles de son pays sont trop intelligentes et risquent de renverser son pouvoir, pourtant bien établi depuis 30 ans.
Pour limiter le nombre de filles en Syldavie il décide que chaque famille aura au moins un enfant et arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon, dans un maximum de 4 enfants par famille.
On considère que chaque enfant autant de chances d'être un garçon qu'une fille, indépendamment du sexe d'éventuel(s) enfant(s) précédent(s).
On se demande si ce choix a la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population.

1. On présente l'algorithme suivant :

Algorithme 3 :

Données: X, NbeEnfants, NbeFilles sont des nombres entiers
NbeEnfants= 0, X = 0
Tant que (X == 0 et NbeEnfants< 4) **Faire**
  Affecter à X un entier aléatoire entre 0 et 1
  NbeEnfants=NbeEnfants+1
Fin Tant que
Si (X == 1) **Alors**
  NbeFilles=NbeEnfants−1
  Afficher « La famille a eu », NbeFilles , « fille(s) et 1 garçon »
Sinon
  La famille a eu 4 filles et 0 garçon
Fin Si

   (a) Que fait-il ?
   (b) Modifier cet algorithme pour qu'il simule les naissances dans N familles quelconque en Syldavie et qu'il renvoit le nombre de garçons et le nombre de filles.
   (c) Programmer votre algorithme sur Scilab.
   (d) Conjecturer une réponse au problème posé.

2. Le « président » de Syldavie appelle S (pour Succès) et E (pour Echec) les événements suivants :
   S : « La famille a un garçon » et E : « La famille n'a pas de garçon »
   (a) Schématiser la situation par un arbre.
   (b) On appelle X la variable aléatoire égale à k si le premier Succès est rencontré au $k^{ième}$ enfant, et à 0 si aucun Succès n'a été obtenu.
   Déterminer la loi de X.
   (c) Répondre au problème posé.

VI. Un exemple de devoir

<u>Exercice</u> 12. (2 points)

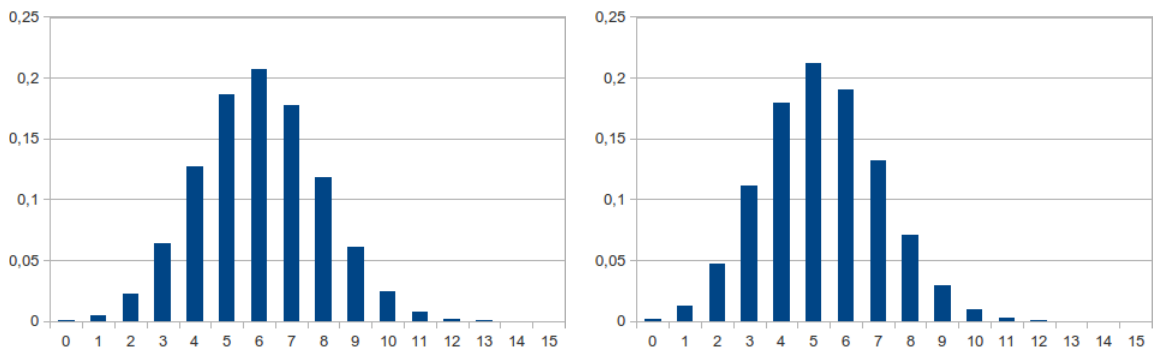
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 10 et p avec $p > \frac{1}{2}$.
Sachant que $V(X) = 2$, calculer p puis $E(X)$.

<u>Exercice</u> 13. (8 points)

Le ministre syldave a supprimé la faculté de médecine. L'unique dentiste de Gattaca est un ancien boxeur, à moitié-aveugle et parkinsonien.

Les syldaves venant le consulter se font toujours arracher une dent.
Le dentiste arrive à peu près à discerner la dent malade grâce aux indications des patients, et essaie toujours d'extraire celle-ci, mais sa maladie le faisant trembler, il n'a qu'une probabilité de 0.4 de réussir.
Le dentiste reçoit quinze clients par jour, en on note X le nombre de dents malades extraites à bon escient sur ces quinze clients.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. *Justifier.*
2. Calculer la probabilité pour qu'aucun des patients n'y laisse une dent malade.
3. Calculer la probabilité que le dentiste arrache exactement 11 dents malades.
4. Calculer la probabilité pour que le dentiste arrache au moins 2 dents malades.
5. Finalement, le dentiste a extrait 7 dents malades. Peut-il être satisfait de lui-même ?
6. Parmi les deux diagrammes en barres suivant, lequel peut représenter la loi de probabilité de X ? *Justifier*



7. Avant chaque intervention, le patient paie 30€, puis le dentiste lui arrache une dent. Si c'est la bonne, le patient doit encore payer 20€.
   (a) Combien le dentiste peut-il espérer gagner d'argent en une journée ? Justifier.
   (b) Les tremblements du dentiste empirant, sa probabilité d'extraire une dent malade risque de baisser.
   A partir de quelle probabilité de réussite ce métier lui permet-il de gagner plus de 510€ par jour ?

Exercice 14. (10 points)
Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limite l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.
Un trajet côute 10€. En cas de fraude, l'amende est de 100€.
Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés (ce n'est pas bien du tout !).
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1. Quelle loi suit X. Justifier.
2. On suppose que $p = 0.05$.
   (a) Calculer à 10^{-4} près $P(X = 5)$. Interpréter.
   (b) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au moins une fois.
   (c) Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par le fraudeur.
   (a) Justifier que $Z = 400 - 110X$.
   (b) Calculer $E(Z)$.
4. (a) La fraude est-elle favorable ou non pour Théo ?
   (b) Pour quelles valeurs de p en serait-il autrement ?