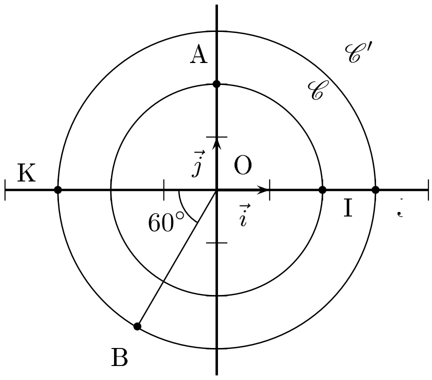
Exercices : Produit Scalaire

I. Applications aux vecteurs orthogonaux

Exercice 1. Dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1;1)$, $(3;4)$ et $(3-k;-1)$ où k est un réel.

1. Déterminer le réel k afin que le triangle ABC soit rectangle en A.
2. Démontrer que le triangle ABC est alors isocèle en A.

Exercice 2. Sur la figure ci-contre on a tracé deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.
Le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormal.
Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OJ}$
2. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OK}$
3. $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
5. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AI}$
6. $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IJ}$
7. $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

1. $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(-1;5)$
2. $||\,\vec{u}\,||=1$; $||\,\vec{v}\,||=2$; $(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{2\pi}{3}$ rad
3. $||\,\vec{u}\,||=2$; $||\,\vec{v}\,||=3$ et $||\,\vec{u}+\vec{v}\,||=3$
4. $||\,\vec{u}\,||=1$; $||\,\vec{v}\,||=3$; $(\vec{u},\vec{v})=0$ rad
5. $||\,\vec{u}\,||=2$; $||\,\vec{v}\,||=3$; $(\vec{u},\vec{v})=\pi$ rad
6. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ orthonormal : $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$

Exercice 4. On prend le centimètre comme unité.
Construire un triangle ABC tel que :

1. $AB=3$, $AC=6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9$
2. $AB=4$, $AC=5$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12$
3. $AB=3$, $AC=4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Exercice 5. On considère un segment $[AB]$ et O son milieu. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et $M\in\Delta$
Montrer que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}AB^2$$

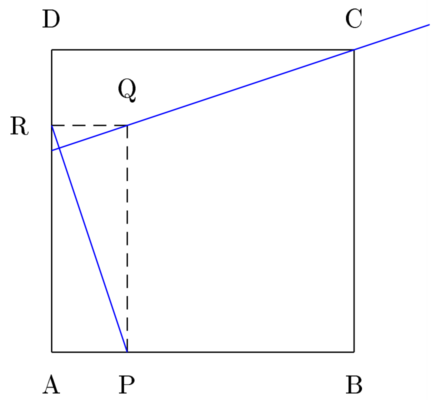
Exercice 6. ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$
3. $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AI}$

Exercice 7. Soit $ABCD$ un carré, on construit un rectangle $APQR$ tel que :

- P et R sont sur les côtés $[AB]$ et $[AD]$ du carré
- $AP = DR$

But : On souhaite montrer que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires



1. Montrer que : $\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ} \cdot \left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (PR) et (CQ) sont perpendiculaires.

Exercice 8. ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$
ABC est-il rectangle ? Si oui, préciser le sommet.

Exercice 9. $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. En déduire BD.

Exercice 10. $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r et M un point non situé sur $\mathscr{C}$. Deux droites issues de M coupent $\mathscr{C}$ respectivement en A et B et en C et D
But : Montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$
On note A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$

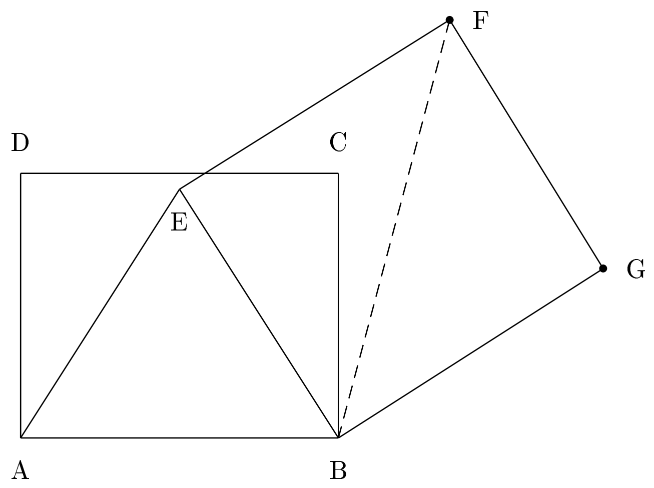
1. Faire deux figures suivant que M est à l'intérieur ou à l'extérieur de $\mathscr{C}$
2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$
3. (a) En utilisant la relation de Chasles, démontrer que :
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = MO^2 - r^2$$
   (b) En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$

> ***Note***
> On montre ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante issue de M, il ne dépend que de la distance de M à O. Le réel $MO^2 - r^2$ (qui est nul lorsque M est un point de $\mathscr{C}$) est appelé puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$. Il est positif lorsque M est à l'extérieur de $\mathscr{C}$ et négatif si M est à l'intérieur de $\mathscr{C}$

Exercice 11. On construit un triangle équilatéral AEB de côté 1 et deux carrés $ABCD$ et $BGFE$ comme sur la figure ci-dessous

1. Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$, en déduire $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BE}$
2. Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$
3. (a) Démontrer que le triangle BCG est équilatéral.
   (b) En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$

4. Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF}$
5. En utilisant la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$
6. En déduire que les points D, E et G sont alignés.



Exercice 12. Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB).
On note $H = (BB') \cap (CC')$

1. Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB}$
2. Calculer $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$
3. Conclure.

II. Applications aux cercles et au droites

Exercice 13. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

Exercice 14. On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère un triangle ABC avec$A(\breve{}1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2; 4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Exercice 15. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne un point $\Omega(2; -3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $R = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2; 0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 16. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points suivants :

$$A(2;1) \qquad B(7;2) \qquad C(3;4)$$

Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport :

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. L'angle $\widehat{A}$ est-il droit ?

Exercice 17. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point $A(3;5)$.
Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OA.

Exercice 18. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on donne $A(-2;2)$ et $B(2;2)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de$[AB]$.
2. Démontrer que, pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$$

3. Démontrer que l'ensemble E des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2=40$ est un cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon $r=4$.
4. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
5. Déterminer les coordonnées des (éventuels) points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
6. Soit λ un réel négatif. Comment choisir λ pour que le point $Z(7;\lambda)$ soit sur $\mathscr{C}$?
7. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en Z.

Exercice 19. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On considère le cercle $\mathscr{C}$ passant par les points $A(4;2)$ et $B(2;6)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite d d'équation $x+y+2=0$.

1. Faire une figure
2. Déterminer les coordonnées de Ω
3. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$

III. Al Kashi

Exercice 20. ABC est un triangle tel que $AB=4$; $AC=3$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=70°$. Calculer BC.

Exercice 21. ABC est un triangle tel que $AB=5$; $AC=3$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=72°$. Calculer BC.

IV. Un exemple de devoir

Exercice 1 : Calculs (6 points)

1. Dans les deux cas suivants, calculer la valeur exacte de $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

   (a) $|| \vec{u} ||= 3$; $|| \vec{v} ||= 2$; $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$ rad (b) $|| \vec{u} ||= 2$; $|| \vec{v} ||= 1$ et $|| \vec{u} + \vec{v} ||= 4$

2. On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure exacte de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.
3. Soient les points $A(1, -2)$, $B(2, 3)$, $C(6, 1)$ et $D(-4, 3)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ? *Justifier*

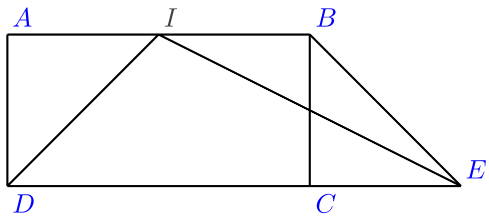
Exercice 2 : Equations de droites et cercles (6 points)

Les questions 1 à 4 sont indépendantes.

1. Soient deux points $D(4, 5)$ et $E(-3, 1)$ du plan. Déterminer une équation de la médiatrice de (DE).
2. Déterminer une équation de la droite Δ passant par $C(-3; 2)$ et perpendiculaire à $(d) : y = 3x + 2$.
3. Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-3, 5)$ et $B(1, -4)$.
4. (a) Déterminer le rayon et le centre Ω du cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.
   (b) Montrer que le point $A(4; -3)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 3 : Projections orthogonales (3 points)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 2$ et $AB = 4$, BDE est un triangle rectangle isocèle en D. On nomme I le milieu du segment $[CD]$. On sait alors que $ID = \sqrt{8}$ et $IE = \sqrt{20}$.



1. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IB}$.
2. Développer puis calculer $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})$.
   Que peut-on en déduire pour les droites (ID) et (BE) ?

Exercice 4 : (2 points)

Dans le triangle IDE de l'exercice ci-dessus, calculer l'angle $\hat{I}$ en radian au centième près.
On rappelle que $ID = \sqrt{8}$, $IE = \sqrt{20}$ et $DE = 6$.

Exercice 5 : (4 points)

1. ABT est un triangle tel que $AT = 53$, $BT = 142$ et $\hat{T} = 35°$.
   Faire un schéma codé puis calculer le côté AB du triangle au dixième près.
2. **Application** : Deux avions de ligne volent l'un vers l'autre à 800 km/h. Un aiguilleur du ciel s'en aperçoit depuis la tour de contrôle.
   Il note instantanément que le premier avion est à 53 km de la tour, que le second avion est 142 km et enfin que l'angle entre les deux avions depuis la tour (ie sous l'angle de vue de l'aiguilleur) est de 35°.
   Combien de temps (tronqué à la minute près) l'aiguilleur a-t-il pour intervenir avant le crash ? *Détailler votre réponse.*