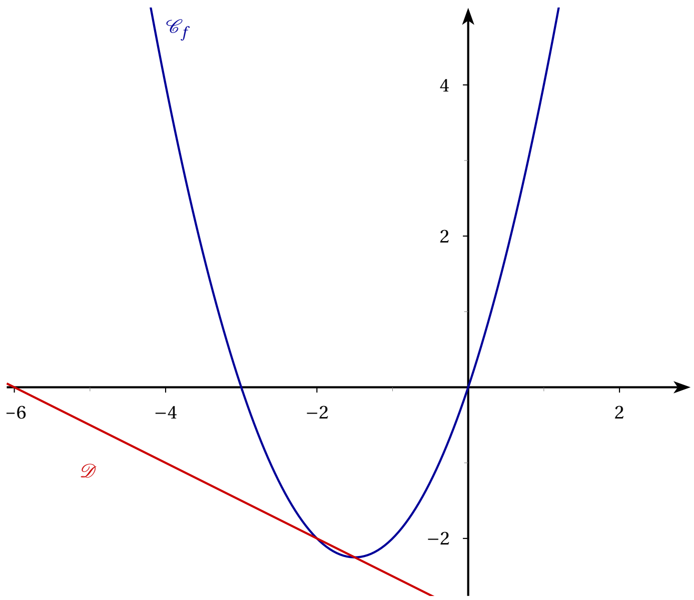
EXERCICES : SECOND DEGRÉ

Exercice 1.
Dans un repère du plan, on a tracé la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x$ et la droite $\mathscr{D} : y = -0,5x - 3$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont deux point communs et déterminer les coordonnées de ces deux points.
2. $\mathscr{P}$ semble couper l'axe des abscisses en deux points. Préciser ces points.



Exercice 2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. (a) $2x^2 + x - 10 = 0$
   (b) $1,2x^2 + 0,4x + 2,3 = 0$
   (c) $-x^2 + 7x - 6 = 0$
   (d) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$
2. Donner, lorsque c'est possible, une factorisation des trinômes de la question précédente.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $5x^2 - 9x = 0$
2. $-x^2 + 11 = 0$
3. $x^2 - 4x + 4 = 0$
4. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice 4. Déterminer, si elles existent, les coordonnées des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ représentant la fonction f avec la droite $\mathscr{D}$ dans les cas suivants :

1. $f : x \longmapsto 5x^2 - 3x + 2$ et $\mathscr{D} : y = -3x + 7$
2. $f : x \longmapsto -x^2 + x + 1$ et $\mathscr{D} : y = 3x - 7$
3. $f : x \longmapsto 3x^2 + x + 2$ et $\mathscr{D} : y = 2$
4. $f : x \longmapsto -3x^2 + 7x + 12$ et $\mathscr{D} : y = 5x + 14$
5. $f : x \longmapsto 0,5x^2 - 3,2x + 2,8$ et $\mathscr{D} : x = 4$

Exercice 5.

1. Etudier, suivant les valeurs du réel x, les signes des trinômes suivants :

(a) $P(x) = 3x^2 + 6x - 9$

(b) $Q(x) = -x^2 - 4x - 4$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) :

$$\frac{-6x-21}{-x^2-4x-4} > 3$$

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $2x^2 + x - 10 > 0$
2. $3x^2 - 7x + 5 \leq 0$
3. $4x^2 - 36x + 81 \leq 0$
4. $-9x^2 - 6x - 1 < 0$
5. $-x^2 + 8x - 23 < 0$
6. $-2x^2 + 2x + 40 \geq 0$

Exercice 7.

1. Factoriser les trinômes :

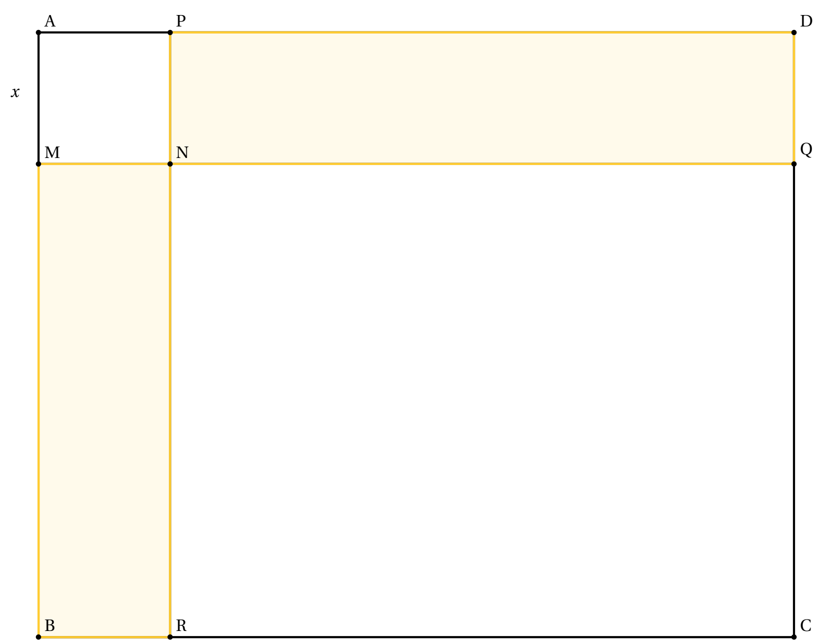
(a) $2x^2 + 3x - 2$;

(b) $2x^2 - 9x + 4$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E) :

$$\frac{1}{2x^2+3x-2} + \frac{x}{2x^2-9x+4} = 0$$

Exercice 8. Dans un rectangle ABCD tel que AB = 8 et BC = 10, on construit le carré AMNP avec M sur [AB] et P sur [AD]. On construit ensuite les rectangles MBRN et PNQD avec R sur [BC] et Q sur [DC] que l'on colorie en jaune. On pose $x = AM$; x appartient donc à $[0;8]$.

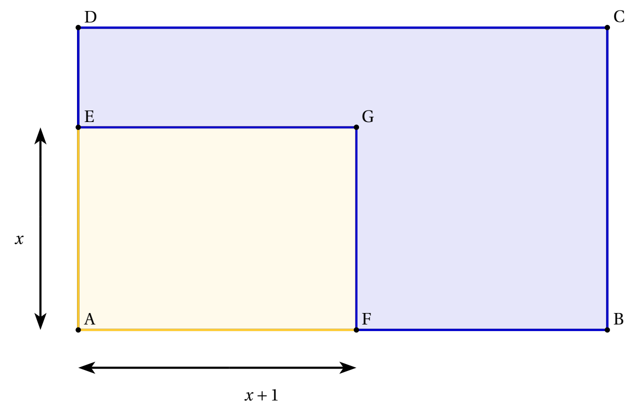


1. Exprimer en fonction de x l'aire totale $v(x)$ des deux rectangles coloriés en jaune.
2. Pour quelle valeur de x, $v(x)$ est-elle maximale et quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $[-5;10]$ par $f(x) = (4-x)(x+3)$.

1. Vérifier que f est une fonction trinôme ; décrire l'allure de sa représentation graphique $\mathscr{P}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

Exercice 10. On considère un rectangle ABCD tel que AB = 7 et BC = 4.
Etant donné un réel x compris entre 0 et 4, on place E sur le segment [AD] et F sur le segment [AB] tels que AE = x et AF = $x+1$. On place G tel que EAFG soit un rectangle.
Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle EAFG est-elle au moins égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD ?



Exercice 11. Proposer deux fonctions polynômes du second degré admettant le tableau de variations donné (pour chacune des fonctions on donnera ses racines).

1.

x	$-\infty$		11		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

2.

x	$-\infty$		$-1,2$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$2,4$	$\nearrow$	

3.

x	$-\infty$		$4,5$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-23	$\searrow$	

4.

x	$-\infty$		-12		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	80	$\searrow$	

Exercice 12. On considère l'inéquation :

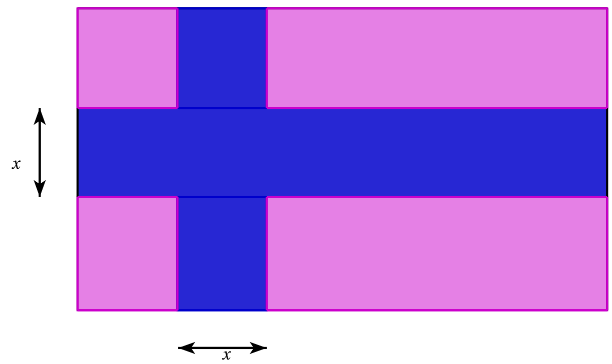
$$3x^4 - 13x^2 + 4 > 0$$

1. Déterminer les racines du trinômes $3X^2 - 13X + 4$.
2. En déduire une factorisation de $3X^2 - 13X + 4$.
3. Résoudre alors l'inéquation proposée dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Pour chaque question, on donnera toutes les solutions possibles.

1. Deux entiers relatifs consécutifs ont la somme de leurs carrés qui vaut 5725. Déterminer ces entiers.
2. Déterminer trois entiers relatifs consécutifs dont la somme des carrés vaut 2030.

Exercice 14. On considère un drapeau de 3 m sur 5 m, orné d'une croix. Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que les parties bleu et rose aient la même aire ?



Exercice 15.

1. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$x^2 - 4x - 5 = k$$
2. Déterminer selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :
$$x^2 + 2x + 4 = kx$$

Exercice 16.

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que BC = 25 cm. L'aire du triangle ABC est 84 cm^2.
Déterminer les dimensions du triangle ABC.
2. DEF est un triangle isocèle en E avec DE = 25 cm. L'aire du triangle DEF est 168 cm^2.
Déterminer les valeurs possibles du périmètre de DEF.
3. Déterminer les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut 221 m^2 et le périmètre 60 m.

Exercice 17. Les élèves d'une classe de première vont visiter un musée. Ils ont à leur charge le coût des entrées. Le musée a établi un tarif de groupe d'un montant de 168 €. Un professeur récolte l'argent auprès des élèves participants. Finalement deux élèves ne peuvent pas venir et chacun des autres élèves doit payer $0,40$ € supplémentaire.
On note x le nombre d'élèves de la classe.

1. Exprimer de deux manières, en fonction de x, le prix initialement demandé à chaque élève.
2. En déduire le nombre d'élèves dans la classe.

Exercice 18. **Un problème de Léonard Euler**
J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour 180 écus. Si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de tissu de plus, j'aurais eu chaque pièce pour 3 écus de moins. Combien ai-je acheté de pièces de tissu ?

Exercice 19. On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{2}{x}$ et les droites $\mathscr{D}_m$ d'équations : $y = m(x+1) - 2$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que les droites $\mathscr{D}_m$ passent par un point fixe C, indépendant de m et que C appartient à $\mathscr{H}$.
2. Représenter sur l'écran d'une calculatrice la courbe $\mathscr{H}$ et les droites $\mathscr{D}_m$ pour les valeurs de m entières comprises entre -1 et 5.
3. Combien de points communs semblent avoir $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$?
4. Démontrer qu'il existe une et une seule valeur non nulle de m pour laquelle $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_m$ ont seulement le point C en commun. Préciser cette valeur de m.
   On dit que la droite $\mathscr{D}_m$ correspondant à cette valeur est la tangente à $\mathscr{H}$ en C.

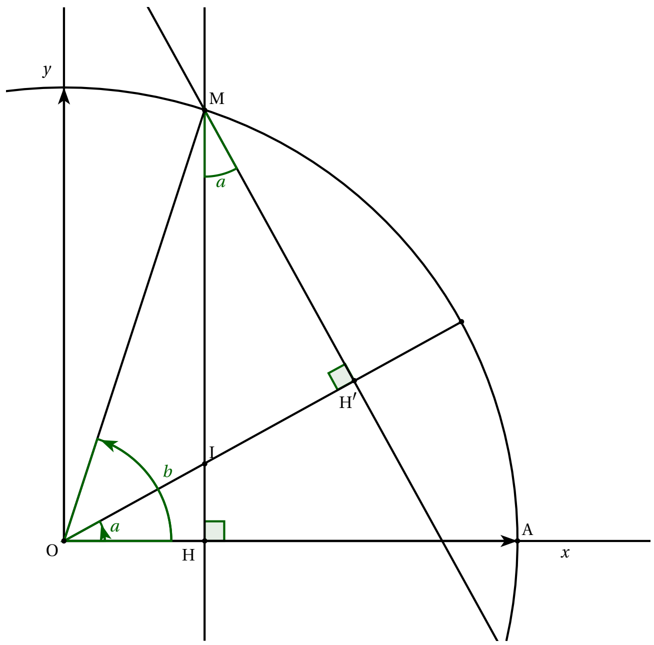
Exercice 20. **Probabilité et second degré**

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et m boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.

1. Calculer la probabilité des événements suivantes : J = « tirer une boule jaune ». B = « tirer une boule bleue ». R = « tirer une boule rouge ». V = « tirer une boule verte ».
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante, si la boule tirée est :
   – rouge, on gagne 10 €.
   – verte, on gagne $5m$ €
   – jaune ou bleue, on gagne $-1-2m$ €.
   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.
   (a) Déduire de la question (1) : $p(X=10)$, $p(X=-1-2m)$ et $P(X=5m)$.
   (b) Calculer m pour que le gain moyen espéré soit de $4,5$ €. En déduire dans ce cas l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 21. Considérons le dessin suivant, dans laquelle la longueur OA = 1 :

PARTIE A. **Formule trigonométrique**



Dans cette partie, les triangles dans lesquels vous raisonnez devront apparaitre clairement.

1. Montrer que

$$\cos(a+b) = \mathrm{OI}\cos a$$

2. En déduire que :

$$\cos(a+b) = \left(\cos b - \mathrm{IH}'\right)\cos a$$

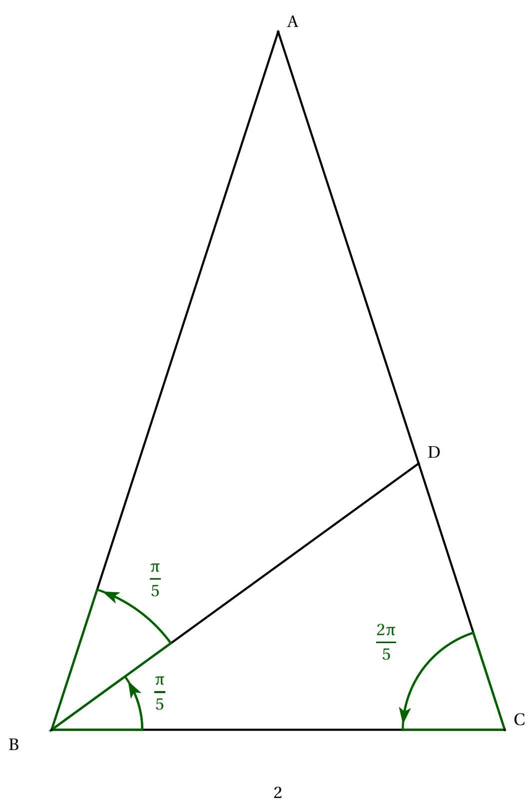
3. En montrant que $\mathrm{IH}' = \mathrm{MH}'\tan a$ puis que $\mathrm{MH}' = \sin b$, conclure que :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

4. En déduire que :

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$

PARTIE B. **Triangle d'or**



ABC est un triangle isocèle en A avec BC = 2 et $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$ rad. [BD) est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ comme représenté ci-dessous.

1. Démontrer que BDC et BDA sont des triangles isocèles, en déduire les longueurs BD et AD.
2. On trace, dans le triangle ABC, la hauteur issue de A qui coupe [BC] en H puis, dans le triangle BDC, on trace la hauteur issue de B qui coupe [DC] en H′.
   (a) Démontrer que :

   $$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\mathrm{AB}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{DC} = 4\cos\frac{2\pi}{5}$$

   (b) Démontrer que AB − DC = 2 et en déduire que :

   $$4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

   (c) Résoudre l'équation $4x^2+2x-1=0$ et en déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

   (d) Déduire de la **partie A** la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

   (e) En déduire les valeurs exactes de $\sin\dfrac{\pi}{5}$ et $\sin\dfrac{2\pi}{5}$.