Chapitre 5

Vecteurs et droites

Hors Sujet

Titre : « Peter Broderick »
Auteur : HTTP ://WWW.ITSTARTSHEAR.COM
Présentation succinte de l'auteur : Peter Broderick est un jeune américain de 25 ans tout juste et pourtant, il a déjà une longue discographie derrière lui. Et ce n'est même pas à cause du fait qu'il ait commencé tôt. Son premier album solo ne date seulement que de 2007. Mais depuis, tous les ans, il en sort 3 ou 4 - même s'il considère que celui-ci est son deuxième véritable. La musique de Peter Broderick s'inscrit dans la lignée des Sufjan Stevens et Owen Pallett et comme eux il participe à élaborer un langage pop moderne.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Colinéarité de deux vecteurs
- ⇝ Décomposer un vecteur dans une base.
- ⇝ Vecteurs directeurs d'une droite.

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

John Louis von Neumann

Leçon 5

Vecteurs et droites

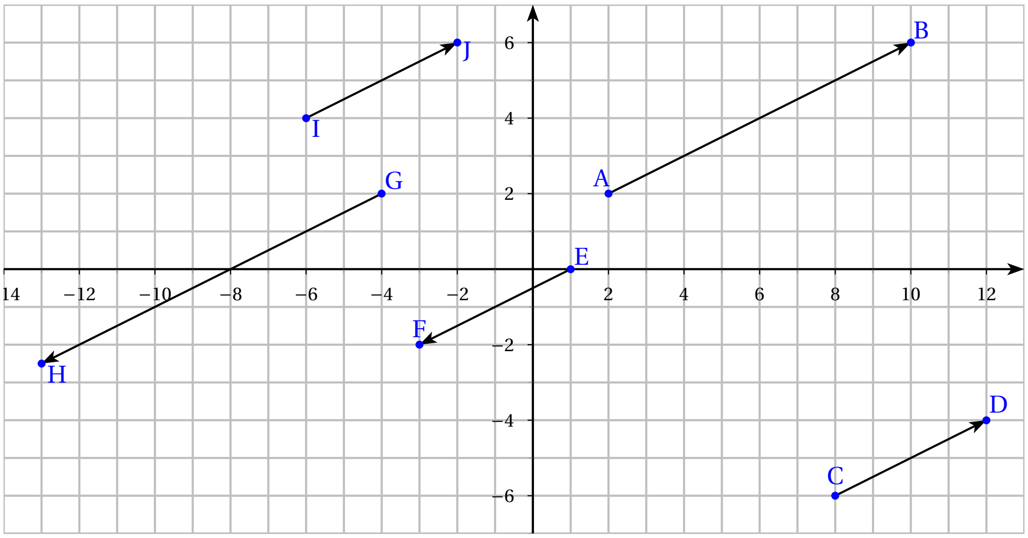
Au fil du temps

On désigne un vecteur par une flèche, plus ou moins longue, qui point dans une direction. Elle n'est ancrée à rien, même si elle peut se fixer sur un point précis d'un objet physique ...
Telle est l'essence étrange des vecteurs, à mi-chemin entre une droite bien concrète et une représentation abstraite. Représentation de quoi ? D'un mouvement ou d'une force physique, comme la gravité qui nous rive au sol ...
Le mot vecteur vient du latin "vector", dérivé du verbe "vehere", qui signifie transporter. Un vector pourrait donc désigner un véhicule, par exemple un chariot, son point de départ n'ayant pas d'importance sur sa nature.
De fait, c'est le caractère abstrait des vecteurs qui explique qu'ils aient mis des siècles pour passer de la notion intuitive à un concept mathématique et physique formel, au XIX^{e} siècle.
En particulier, c'est la nature peu maniable de la droite géométrique, telle que l'avait définie le grec Euclide au III^{e} avant JC, qui a progressivement conduit à la formalisation des vecteurs. En effet, Euclide décrit dans son ouvrage L*es Elements* la droite comme « une longueur sans largeur », dont « les limites sont des points »et « qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle ». Si ces définitions conduisent à l'idée de distance entre points, cela laisse peut de place aux opérations mathématiques... Quelles manipulations sont permises ? ?
Mais l'oeuvre d'Euclide traverse les siècles et progressivement les manipulations de figures sont associées à des équations algébriques qui libèrent la droite de ses contraintes géométriques, notamment au XI^{e} sicèle, grâce au le poète, philosophe et mathématicien perse Omar Khayyâm. La symbiose entre la géométrie et l'algèbre se fera au XVII^{e} siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées (dites cartésiennes).
Pourtant c'est la physique, entre 1604 et 1687, qui rendra les vecteurs indispensables, car ils incarneront les notions de vitesse, d'accélération et de force s'exerçant sur un solide. C'est Galilée qui lance ce processus, par la découverte des premières lois du mouvement d'un solide.
Chez Galilée, les notions de vitesse et d'accélération restent informelles, tout comme celle de force qui attire les corps vers le sol, mais elles conduiront l'anglais Isaac Newton, en 1687, à leur donner un sens clair via le concept de vecteur.
Newton instaure également les règles d'addition entre forces, entre accélérations, entre vitesses ... qui sont celles des vecteurs tels qu'on les connait aujourd'hui.
Pour finir, disons que les savants du XIX^{e} incluront les vecteurs dans un cadre plus large, celui des tenseurs, dont Einstein fera grand usage dans sa théorie de la relativité, qui généralise la théorie de Newton.

I. Vecteurs

I.1. Rappels

Exercice 1. Dans Géogébra, on a créé la figure suivante.



1. **Caractérisation de vecteurs**
   (a) Que possèdent en commun les vecteurs créés ?
   (b) Que possèdent en plus les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$?
   Et les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$?
   Que dire des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$?
   Quel quadrilatère est alors un parallélogramme ?
   (c) Ecrire les égalités vectorielles qui existent entre $\overrightarrow{AB}$ et chacun des autres vecteurs.
2. **Coordonnées de vecteurs**
   (a) Retrouver pour chaque vecteur à partir des coordonnées de ses points extrêmes ?
   (b) Ecrire sous la forme de système les égalités vectorielles de la question 1.d.
3. **Application**
   Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ? Si oui, préciser le coefficient de colinéarité :

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 135 \\ -45 \end{pmatrix}$

   (d) $\vec{w}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

4. **Condition nécessaire et suffisante**
   On veut s'affranchir de la recherche du coefficient de colinéarité k et trouver un test numérique simple pour prouver la colinéarité de deux vecteurs.

   Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, dont on connait les coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

   (a) <u>Condition nécessaire</u> : on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   Traduire ce que cela signifie à l'aide des coordonnées de ces vecteurs.
   Montrer qu'en combinant les égalités obtenues, on obtient :
   Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.

(b) Condition suffisante : on suppose que l'on a l'égalité $xy' - yx' = 0$.
Comme $\vec{u}$ est non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle, par exemple son abscisse x. Posons alors $k = \dfrac{x'}{x}$ (si x est nul, on prendra alors $k = \dfrac{y'}{y}$ et la méthode restera la même).
Exprimer alors y' en fonction de y.
Que peut-on alors dire sur les coordonnées des deux vecteurs ? Conclure.

(c) *Cas particulier* : Que peut-on dire du vecteur $\vec{0}$? Vérifier que la condition fonctionne aussi avec ce vecteur.

5. **Application**
Dire si les vecteurs suivants sont colinéaires, en utilisant la condition nécessaire et suffisante démontrée ci-dessus.

(a) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 3.5 \\ -7.8 \end{pmatrix}$

(b) $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix} 22.4 \\ 10.85 \end{pmatrix}$

(c) $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 20 \end{pmatrix}$

I.1.a. Définition

Définition 1. (Translation de vecteur)

Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ symbolise le déplacement rectiligne de A vers B. On l'associe à la translation qui transforme A en B, noté $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur non nul du plan est caractérisé par :

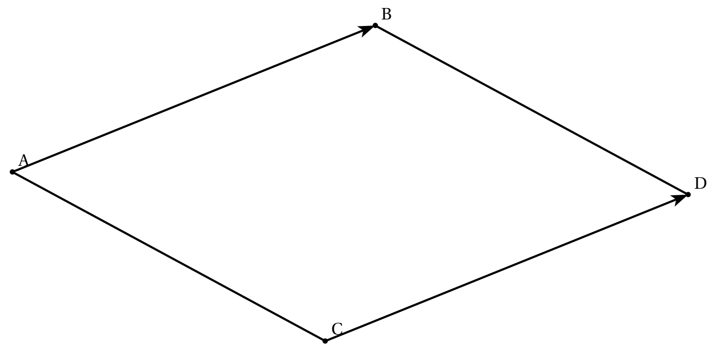
Sa direction — Son sens — Sa longueur

Remarques :

- Un vecteur est un déplacement, pour déterminer un déplacement seul compte le point d'origine et le point d'arrivée. Cependant on peut représenter un même vecteur depuis n'importe quel point du plan i.e qu'un vecteur est indépendant de son point d'origine (point de départ)
- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ son égaux, on peut leur donner un même nom, par exemple $\vec{u}$.
On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Il existe un vecteur qui n'a ni direction, ni sens, et de la longueur 0. On l'appelle le *vecteur nul* et on le note $\vec{0}$.
- Deux vecteurs sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, la même norme, mais des sens opposés.
On note $-\vec{u}$ l'opposé du vecteur $\vec{u}$. Ainsi l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$
- La longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est aussi appelée norme. C'est un donc nombre positif ou nul. On le note $||\vec{u}||$.
En particulier : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$

Propriété 1.

Soient A, B, C et D quatre points avec A et B distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme.



Exercice 2. ABCD est un parallélogramme.

1. Construire les points K et L définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

2. Démontrer que AKCL est un parallélogramme.

I.1.b. Opération sur les vecteurs

Définition 2. (Somme de vecteurs)

La **somme de deux vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On le note $\vec{u}+\vec{v}$.

Remarque : On retiendra l'idée que l'on met « bout à bout »les vecteurs puis que les « détours »ne comptent pas, puisque le vecteur somme est le chemin *rectiligne* entre le point de départ du chemin fomé et son point d'arrivée.

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Propriété 2. (Relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

Définition 3. (Produit d'un vecteur par nombre réel)

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur noté $k\vec{u}$. Il est défini comme le vecteur ayant :
⇝ la même direction que $\vec{u}$
⇝ le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$.
⇝ une norme égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

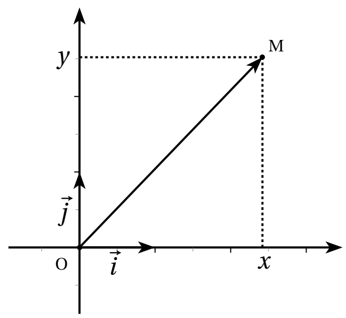
Exercice 3. Le quadrilatère ABCD est un trapèze avec $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$. On note O le milieu de la diagonale [AC].

1. Construire un représentant du vecteur $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$
2. Construire le vecteur $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DC}$ ayant pour origine O.
3. Ecrire à l'aide d'un vecteur le vecteur suivant $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CO}$

I.1.c. Coordonnées et propriétés

Définition 4.

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan muni d'un repère $(O;I;J)$. En note $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ on note le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Si $M(x;y)$, on note $\vec{u}(x;y)$ ou encore $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Remarques :

⇝ Le couple $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ correspond également au déplacement effectué sur le quadrillage.
⇝ Celles-ci sont donc indépendantes de l'origine du repère.
⇝ A partir de maintenant, on se place dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.
⇝ On en déduit facilement que deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées dans un repère.

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x = x \text{ et } y = y'$$

Propriété 3.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère **orthonormal** $(O;\vec{i};\vec{j})$. Grâce au théorème de Pythagore, on montre que :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété 4.

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

On a donc aussi :

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Remarque : Soient deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ et k un nombre réel. On a :

$$\vec{u}+\vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad k\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Dans un repère orthonormée on donne A(2;3), B(5;3) et C(5;7). Montrer que le triangle ABC est rectangle.

I.1.d. Colinéarité de deux vecteurs

Définition 5.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 1.

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
On a les équivalences suivantes : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
$\Longleftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.
$\Longleftrightarrow$ leurs coordonnées sont proportionnelles ($x=kx'$ et $y=ky'$ avec $k\in\mathbb{R}$).
$\Longleftrightarrow$ $xy'-x'y=0$

Exercice 5.

1. On considère les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 5.2 \\ -18.2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3\begin{pmatrix} -6.4 \\ 22.5 \end{pmatrix}$. Lesquels sont colinéaires ?
2. Calculer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 14 \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Exercice 6. Déterminer le(s) valeur(s) de k telle(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ k+1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} -k+1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} k^2+17 \\ 5k-4 \end{pmatrix}$

Exercice 7.

1. Trouver un réel x tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \cos^2(x) \\ -3\sin(x)+6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{pmatrix} \sin(x) \\ 3 \end{pmatrix}$ soient colinéaires
2. L'opposé de la valeur trouvée précédemment est-elle aussi une solution ?
3. Etes-vous capable de donner d'autres solutions ? toutes les solutions ?

Exercice 8. Vrai ou Faux :

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3^{22} \\ \dfrac{1}{3^{25}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3^{71} \\ 9^{12} \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
2. Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors il existe k' tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$.
3. $\vec{0} = k\vec{0}$
4. $\vec{0} = 0\vec{u}$
5. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est colinéaire au(x) vecteur(s)

   (a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{z}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Si deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors :

   (a) $a'b - ab' = 0$
   (b) $ab' - a'b = 0$
   (c) $ab' = a'b$
   (d) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$
   (e) $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$

I.1.e. Applications directes

Propriété 5.

Soients A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Corollaire 1.

Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Méthode

Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de démontrer que deux des vecteurs formés par les trois points sont colinéaires.

Exercice 9. On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère ABED
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exercice 10. Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.

Exercice 11.

1. Tracer un quadrilatère quelconque ABCD.
   Placer les milieux respectifs I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD].
2. Prouver que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Exercice 12. Soient A et B deux points distinct du plan. On définit le point C tel que $4\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Justifier que les points A, B et C sont alignés.
3. Faire une figure.

Exercice 13. ABC est un triangle. Soient D et E les points tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire que D appartient à la droite (AE).

Exercice 14. Voici un algorithme :

Algorithme 1 :

Données: x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c et d sont deux nombres réels
Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
$a := x_B - x_A$
$b := y_B - y_A$
$c := x_C - x_A$
$d := y_C - y_A$
Si ($ad - bc = 0$) **Alors**
  Afficher « les points sont alignés »
Sinon
  Afficher « les points ne sont pas alignés »
Fin Si

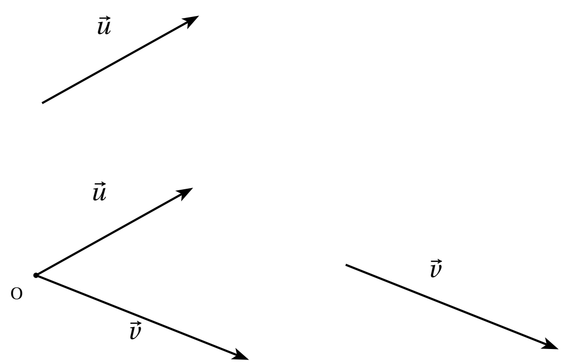
1. Tester cet algorithme avec les points A(1;−2), B(3;5) et C(1;−1).
2. Ecrire cet algorithme sur votre calculatrice graphique.

I.2. Décomposition de vecteurs dans une base

I.2.a. Définition et propriété

Définition 6.

Trois points non alignés définissent un repère quelconque du plan, de même la donnée de deux vecteurs non colinéaires et d'un point (que l'on prendra comme origine) définissent un repère quelconque du plan.
On appelle **base** du plan vectoriel tout couple de deux vecteurs non colinéaires.



Remarques :

⇝ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires forment une base notée $(\vec{u}, \vec{v})$.
⇝ Les côtés d'un triangle ABC quelconque non aplati permettent de former des bases.

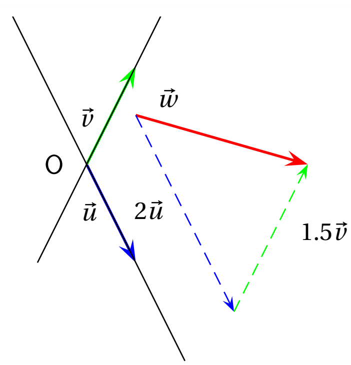
Propriété 6.

On considère une base $(\vec{u}, \vec{v})$.
Tout vecteur $\vec{w}$ s'exprimer de manière unique comme une somme de deux multiples de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on dit que l'on a obtenu une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

où x et y sont des réels à déterminer.

Exemple :



Définition 7.

Si dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ on a $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ alors le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans cette base. x désigne l'abscisse et y l'ordonnée.

I.2.b. Applications

Exercice 15. A, B et C sont trois points non alignés. Les points N et P sont tels que

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.
2. (a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.

   (b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires. Qu'en déduit-on pour les points A, P et N ?

Exercice 16. A, B et C sont trois points non alignés. Les points D, E et F sont définis par :

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$$

1. Faire une figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Exprimer $\overrightarrow{DF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$.
4. En déduire que les points D, E et F sont alignés.

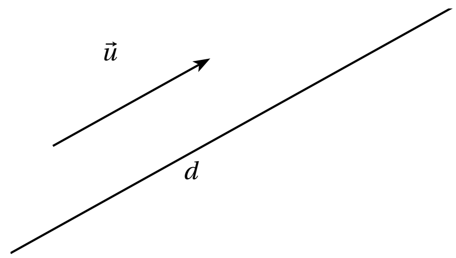
II. Vecteurs et Droites

II.1. Vecteurs directeurs d'une droite

II.1.a. Définition

Définition 8.

Soit d une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite d.



Remarque : Si A et B sont deux points distincts d'une droite d alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite d.

<u>**Exercice**</u> **17.** Dans un repère, soit $A(-2;3)$, $B(3;1)$ et $C(-1;-3)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la médiane passant par le sommet A du triangle ABC.

II.1.b. Propriété

Propriété 7.

Dans le plan muni d'un repère, soit d une droite d'équation $y = mx + p$ alors le vecteur $\vec{u}(1;m)$ dirige la droite d.

Preuve

$d : y = mx + p$ donc le point $A(0,p) \in d$ et le point B de coordonnées $(1, m+p)$ est aussi un point de la droite d. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite d et ce vecteur a pour coordonnées :

$$\left(1-0; m+p-p\right) = (1;m)$$

Propriété 8.

- Soit d une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}$ et d' une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}'$. Dans ce cas :

$$d//d' \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires}$$

- Soit A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et d la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$. Un point M appartient à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Exercice 18. Dans un repère du plan, on donne les points $A(4;0)$, $B(2;-3)$, $C(2;1)$ et le vecteur $\vec{u}(3;5)$.

1. Tracer la droite (AC) et la droite d passant par B, de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Le point $E\left(-3;\frac{7}{2}\right)$ appartient-il à la droite (AC) ? Justifier.
3. Montrer que le point A n'appartient pas à la droite d.

II.2. Equation cartésienne d'une droite

Théorème 2.

Dans un repère du plan, toute droite d (même celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées) admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax+by=c$ avec $(a;b)\neq(0;0)$.

Preuve

Soit $A(x_A;y_A)$ un point de d et $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur directeur de d.

$$\begin{aligned}
& M(x;y)\in d \\
\Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{AM}\left(x-x_A;y-y_A\right) \text{ et } \vec{u}\left(\alpha;\beta\right) \text{ sont colinéaires} \\
\Longleftrightarrow\ & \beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=0 \\
\Longleftrightarrow\ & \beta x-\alpha y=\beta x_A-\alpha y_A
\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en posant $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=\beta x_A-\alpha y_A$. De plus comme $\vec{u}\neq\vec{0}$, les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls.

Théorème 3.

Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax+by=c$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ est l'équation d'une droite. De plus cette droite a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

Preuve

On décompose cette démonstration, en étudiant deux cas, le premier si $b\neq 0$ et le second si $b=0$.

⇝

$$\begin{aligned}
& ax+by=c \\
\Longleftrightarrow\ & by=c-ax \\
\Longleftrightarrow\ & y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}
\end{aligned}$$

Ainsi l'équation $ax+by=c$ s'écrit sous la forme $y=mx+p$ avec $m=-\frac{a}{b}$ et $p=\frac{c}{b}$, or il s'agit de l'équation d'une droite qui coupe l'axe des ordonnées de vecteur directeur $\vec{v}\left(1;-\frac{a}{b}\right)$. Par conséquent le vecteur $-b\vec{v}$ dirige encore cette droite et a pour coordonnées :

$$(-b;a)$$

⇝ Si $b=0$ alors l'équation $ax+by=c$ devient $ax=c$. De plus si $b=0$ alors $a\neq 0$ et donc l'équation $ax+by=c$ peut s'écrire $x=\frac{c}{a}$ qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées. Un vecteur directeur de cette droite est alors $\vec{v}(0;1)$ et donc $a\vec{v}$ dirige encore cette droite et a pour coordonnées $(0;a)$.

Exercice 19. Dans un repère du plan, on donne les points A$(4;0)$, B$(2;-3)$, F$\left(3;-\dfrac{4}{3}\right)$ et le vecteur $\vec{u}(3;5)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par B, de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Le point F appartient-il à la droite d ?
3. Le point A appartient-il à la droite d ?

Exercice 20. Dans un repère du plan, tracer les droites $d_1 : 2x+3y=5$ et $d_2 : -2x=-5$.

Exercice 21. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par les points A$(15;-10)$ et B$(-25;30)$.

Propriété 9.

Les droites d'équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

Preuve

Le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ dirige d et le vecteur $\vec{v}(-b';a')$ dirige d'. Ainsi $d//d'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires i.e si et seulement si

$$-a'b+ab'=0 \Longleftrightarrow ab'-a'b=0$$

Exercice 22. On considère un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Donner une équation cartésienne de la droite d passant par le point A$(5;-1)$ et parallèle à la droite d_1 dont une équation cartésienne est $3x-y=-12$.
2. La droite d est-elle parallèle à la droite d_2 dont l'équation cartésienne réduite est $y=-3x+14$?