Chapitre 2

Trigonométrie

Hors Sujet

Titre : « Solo Piano II »
Auteur : Chilly Gonzales
Présentation succinte de l'auteur : Gonzales (né en 1972 à Montréal au Canada), ou encore Chilly Gonzales, de son vrai nom Jason Beck, est un musicien canadien.
Gonzales produit une musique electro-pop volontairement cheap et humoristique, un « cabaret dada » avec des textes faussement naïfs et remplis d'autodérision, versant parfois dans une parodie de hip-hop.
L'artiste révèle une toute nouvelle facette de sa personnalité avec un album entièrement instrumental, Solo Piano, publié chez No Format !. Acclamé par le public et la critique, il est régulièrement comparé avec le travail du musicien Erik Satie, et permet à Gonzales de gagner en notoriété à travers le monde. Solo Piano a connu une large diffusion et reste l'album de Gonzales le plus vendu à l'heure actuelle. Durant l'été 2012, le canadien donne une suite à cet album et sort Solo Piano II.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- $\rightsquigarrow$ Passer du degré au radian et réciproquement.
- $\rightsquigarrow$ Connaître et savoir utiliser le cercle trigonométrique complet.
- $\rightsquigarrow$ Résoudre des équations trigonométriques

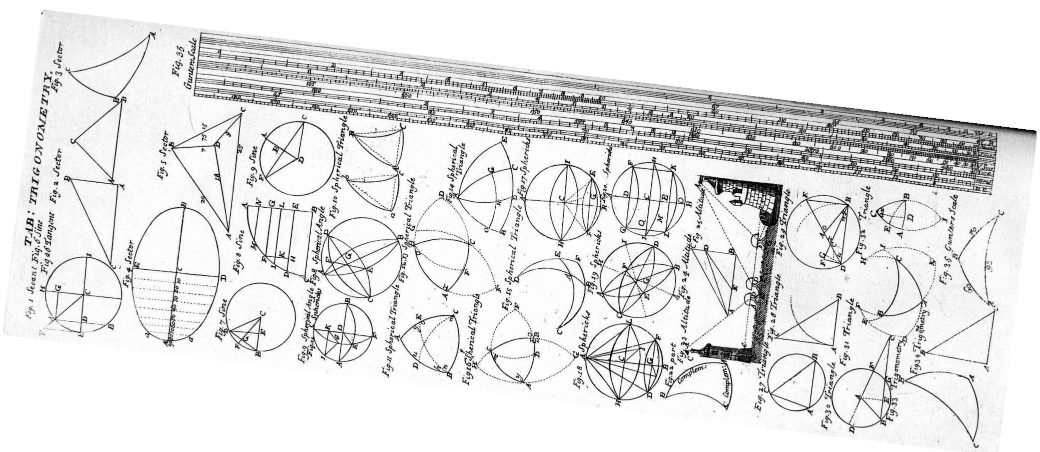
« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 2

Trigonométrie

Au fil du temps

Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d'Égypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l'Indus, il y a plus de 4000 ans. Il semblerait que les Babyloniens aient basé la trigonométrie sur un système numérique à base 60. Lagadha (-1350 ; -1200) est le premier mathématicien à utiliser la géométrie et la trigonométrie pour l'astronomie. La plupart de ses travaux sont aujourd'hui détruits. La première utilisation de sinus apparaît dans les sulba Sutras en Inde, entre 800 et 500 avant J.C., où le sinus de $\frac{\pi}{4}$ est correctement calculé comme $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans un problème de construction d'un cercle de même aire qu'un carré donné (le contraire de la quadrature du cercle).



Lorsque qu'on cherche une rue sur un plan de ville, on repère le rectangle où se trouve cette rue grâce à une lettre qui définit une colonne et un nombre qui définit une ligne du quadrillage sur le plan. Les marins ou les géographes repèrent un point sur la Terre grâce à sa longitude et sa latitude. Les astronomes ont besoin, eux, de trois mesures pour repérer un objet spatial, par exemple deux angles définissant une direction et une distance caractérisant l'éloignement de l'objet sur la direction. Le repérage est donc indispensable dès lors qu'on cherche à définir la position d'un objet dans un espace. Les repères que nous avons utilisé jusqu'à présent sont dit cartésiens, adjectif créé en hommage à Descartes (1596 - 1650) mathématicien et philosophe français qui inventa en même temps que Fermat (1601 - 1665) mais indépendamment de lui, le système de coordonnées que nous utilisons couramment. Les repères cartésiens utilisés jusqu'à présent permettent de positionner des points dans un plan. Ils peuvent être complétés par une troisième coordonnée permettant de se repérer dans l'espace à trois dimensions. Ces repères ne sont pourtant pas les seuls permettant de positionner des objets, nous allons découvrir dans ce chapitre comment se repérer sur un plan avec un angle et un rayon : grâce aux coordonnées polaires.

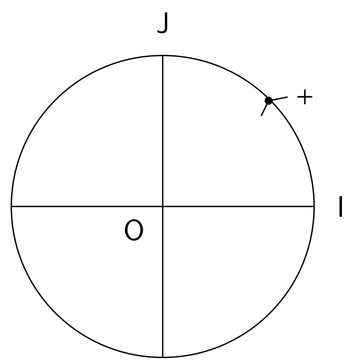
I. Mesure d'un angle en radian

I.1. Le cercle trigonométrique

Une unité de longueur est choisie dans le plan.

Définition 1.

Un cercle de rayon 1, munit d'un sens de rotation, sur lequel est fixé un point « d'origine I »est appelé cercle trigonométrique.



Pour tout le chapitre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I (donc de rayon 1, et orienté pos- itivement).
J est un point du plan tel que $(OI) \perp (IJ)$. On définit alors un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

I.2. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Il y a trois manières de repérer un point M sur un cercle :
- Par ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- Par la mesure de l'angle orienté $\widehat{IOM}$
- Par la mesure de l'arc orienté $\widehat{IM}$

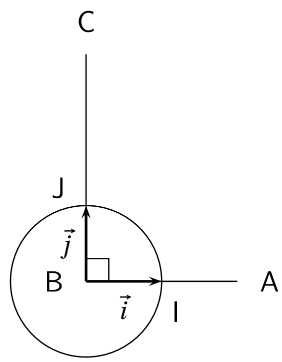
Remarque : Nous allons établir un lien entre ces trois manières de repérer un point sur le cercle trigonométrique.

I.3. Les angles en radian

I.3.a. Principe

On considère un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$

Principe : Plutôt que d'utiliser une unité de mesure d'angle arbitraire, le degré, on essaye de construire une unité de mesure des angles qui dépend de l'unité de longueur du repère choisit.
Considérons un angle $\widehat{ABC} = 90°$, on construit alors le cercle $\mathscr{C}$ de centre B et de rayon 1, puis on associe le repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ comme suit :



La mesure de l'arc $\widehat{\text{IJ}}$, dans le repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$ est alors identique, quelque soit l'angle droit choisit au départ. De plus la longueur de cet arc, est égale au quart du périmètre du cercle $\mathscr{C}$, i.e elle vaut

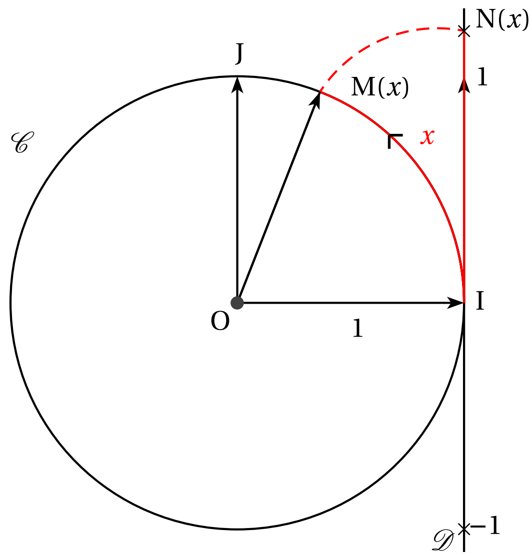
$$\frac{1}{4}\times 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

On dira que l'angle $\widehat{\text{ABC}}$ mesure $\frac{\pi}{2}$ radians et on notera $\widehat{\text{ABC}} = \frac{\pi}{2}$ rad.
En orientant le cercle $\mathscr{C}$, on peut alors effectuer la distinction suivante :

$$\widehat{\text{ABC}} = \frac{\pi}{2} \text{ rad et } \widehat{\text{CBA}} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

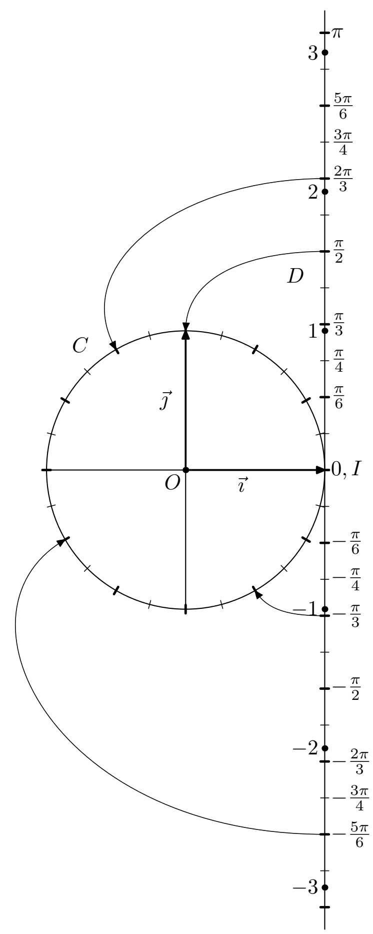
I.3.b. Enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique

Dans un repère $(\text{O};\vec{i},\vec{j})$ on considère le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1. Sur ce cercle le sens direct ou positif est contraire au sens des aiguilles d'une montre et le sens indirect ou négatif suit le sens de rotation des aiguilles d'une montre.
Afin d'exploiter l'idée exposée dans le paragraphe précédent nous avons ajouté à notre figure une droite graduée $\mathscr{D}$ d'origine I parallèle à $(\text{O};\vec{j})$ et de même unité que le repère.
La droite $\mathscr{D}$ représente l'ensemble des nombres réels, à chaque réel x correspond sur $d\mathscr{D}$ le point N d'abscisse x sur la droite $\mathscr{D}$. En « enroulant »$\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique à chaque point de $\mathscr{D}$ va correspondre un unique point sur le cercle trigonométrique.
Ainsi le point N d'absisse x sur la droite $\mathscr{D}$ se retrouve sur le point M du cercle $\mathscr{C}$. x est alors une mesure de l'arc orienté $\widehat{\text{IM}'}$ et donc de l'angle orienté $\widehat{\text{IOM}'} = x$ rad



Remarque : Le point d'abscisse $x+2\pi$ de la droite $\mathscr{D}$ se retrouve aussi sur le point M, c'est aussi le cas du point d'abscisse $x-2\pi$ ou encore $x+4\pi$ et plus généralement de tous les points d'abscisse $x+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$. Autrement dit la mesure de l'angle orienté $\widehat{\text{IOM}}$ vaut :

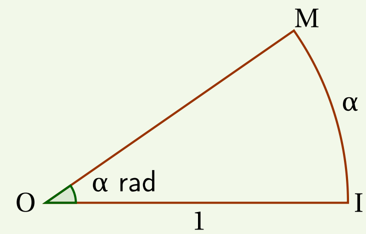
$$\widehat{\text{IOM}} = x \text{ rad} = x+2\pi \text{ rad} = x-2\pi \text{ rad} = x+2k\pi \text{ rad où } k\in\mathbb{Z}$$



Définition 2.

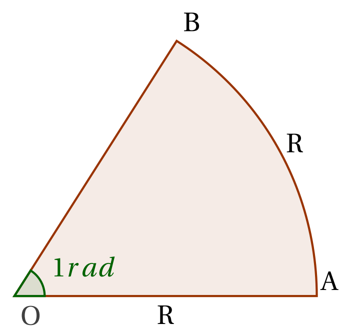
Soit A le point de $\mathscr{C}$ associé au réel 1. On définit le radian (symbole rad) comme la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{IOA}}$ ainsi construit.

Ainsi, la mesure d'un angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ en radians est la longueur de son arc associé $\widehat{\mathrm{IM}}$.



Remarques :

- Au collège, le degré comme unité d'angle convenait parfaitement, même pour la trigonométrie (dans un triangle rectangle). Mais pour mettre en oeuvre des notions qui seront abordées dans les classes ultérieures, il est plus pratique d'utiliser désormais le radian.
- Cette définition ne dépend pas de l'unité de longueur choisie. En fait, dans un cercle de rayon R, 1 radian est la mesure d'un angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon R.



Propriété 1.

Les mesures d'angles en degrés et en radians sont proportionnelles.

Preuve

Les longueurs d'arc sont proportionnelles aux angles en degrés.

Exemples :

Le périmètre de $\mathscr{C}$ valant 2π, on en déduit facilement qu'un angle plat mesure π radians ; un angle droit $\frac{\pi}{2}$ rad.

Avec le tableau de proportionnalité suivant, on trouve convertit n'importe quelle mesure.

Mesure en degrés	180	d
Mesure en radians	π	α

Ainsi pour convertir 60° en radian on calcule $\alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ rad.

Pour convertir $\frac{5\pi}{6}$ rad en degré, on calcule $d = \frac{\frac{5\pi}{6} \times 180}{\pi} = \frac{5 \times 180}{6} = 5 \times 30 = 150°$

Correspondance degré-Radian

mesure en degrés	O	30	45	60	90	180	270	360
mesure en radians	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}rad$	2π

Exemple :

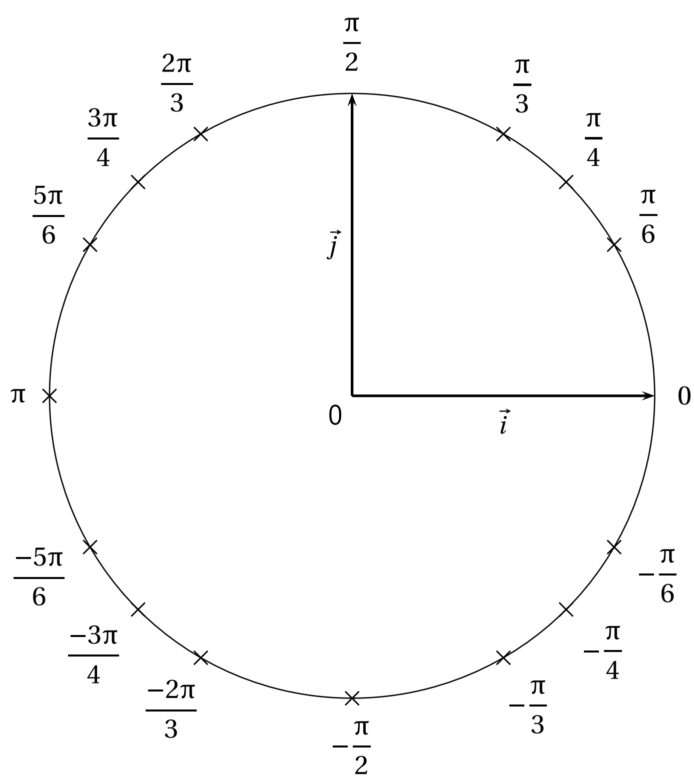
Considérons le point A sur le cercle trigonométrique associé au réel $x = \frac{7\pi}{4}$. En plaçant A sur le cercle on peut facilement trouver la mesure principale de l'angle en radian : ici, $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$

Exercice 1. Les réels $\frac{7\pi}{5}$ et $-\frac{13\pi}{5}$ sont-ils des mesures d'un même angle orienté en radians ?

Remarque : On pourrait désormais décrire la position d'un point M sur le cercle en donnant la valeur de l'angle $\widehat{\text{IOM}}$, cependant, sans précision supplémentaire, nous aurions le choix entre deux points M ...
Il devient donc important de préciser un « sens »pour les angles et une nouvelle désignation, afin de savoir que l'on tient compte de l'orientation.

I.3.c. Mesure Principale d'un angle en radian

Un angle en radian admet une infinitée de mesure mais une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on dit qu'il s'agit de la mesure principale d'un angle en radian
Ci-dessous, quelques mesures principales d'angles en radians sur le cercle trigonométrique :



II. Les angles de vecteurs non nuls

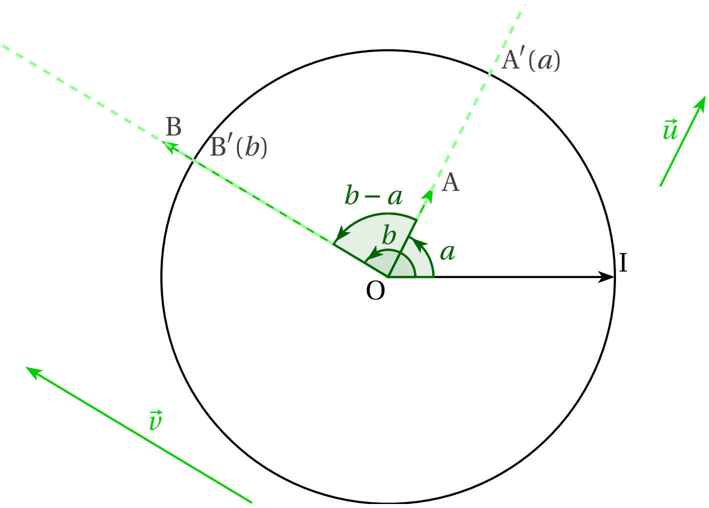
On conserve les notations précédentes. De plus, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls.

II.1. Définition

Définition 3. (Angle orienté de vecteurs)

Soit O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
Les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$ sont les mesures en radians de l'angle orienté $\widehat{AOB}$

Remarque : Désormais nous distinguerons angle géométrique et angle orienté ; un angle géométrique est toujours **positif**. Ce n'est pas le cas d'un angle orienté, qui peut être négatif et dont le signe dépend de l'orientation choisie.



Remarques :

- On a évidemment :

$$(\vec{u};\vec{v}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'};\overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB'})\ldots$$

- Lorsque O est le centre du cercle trigonométrique, les mesures de $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ s'obtiennent en soustrayant b à a comme indiqué sur la figure ci-contre. On utilise le radian lorsqu'on parle d'angle orientés de vecteurs et on tient compte de l'orientation du plan, sans le préciser à chaque fois. De plus, elle va s'avérer très pratique pour les manipulations algébriques.

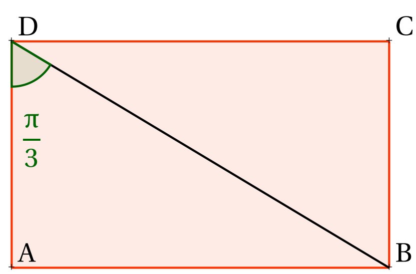
Exercice 2. On a la figure suivante, où ABCD est un rectangle direct.

Angles géométriques

$$\widehat{ADB} = \widehat{BDA} = \frac{\pi}{3}$$

$$\widehat{ADc} = \widehat{CDA} = \frac{\pi}{2}$$

$$\widehat{BDC} = \widehat{CDB} = \frac{\pi}{6}$$



Angles orientés

$$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{3} \text{ et } (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } (\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{6} \text{ et } (\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}) = -\frac{\pi}{6}$$

Donner des mesures des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD})$; $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD})$

Exercice 3. ABC est un triangle équilatérale direct.
Lire graphiquement une mesure de chacun des angles ci-dessous :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \qquad (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) \qquad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$$

Remarque : Un angle a une infinité de mesures. Sur la figure ci-dessus on aurait pu écrire :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = \frac{5\pi}{3} \qquad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{7\pi}{3}$$

Toutes les mesures s'obtiennent en ajoutant $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. On note alors :

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{3}(2\pi) \qquad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

Définition 4. (Mesure principale)

Un angle $(\vec{u}; \vec{v})$ possède une infinité de mesures mais une unique dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, appelée sans surprise **mesure principale**.

Exemples :

Trouver les mesures principales de $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{19\pi}{5}$ et $\frac{51\pi}{6}$.

$$\pi < \frac{5\pi}{3} < 2\pi \quad \text{, donc} \quad -\pi < \frac{5\pi}{3} - 2\pi < 0 \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$$

Donc la mesure principale de $\frac{5\pi}{3}$ est $-\frac{\pi}{3}$.

$$-4\pi < -\frac{19\pi}{5} < -3\pi \quad \text{, donc} \quad 0 < -\frac{19\pi}{5} + 4\pi < \pi \quad \text{et} \quad -\frac{19\pi}{5} + 4\pi = \frac{\pi}{5}$$

Donc la mesure principale de $-\frac{19\pi}{5}$ est $\frac{\pi}{5}$.

$$8\pi < \frac{51\pi}{6} < 9\pi \quad \text{, donc} \quad 0 < \frac{51\pi}{6} - 8\pi < \pi \quad \text{et} \quad \frac{51\pi}{6} - 8\pi = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Donc la mesure principale de $\frac{51\pi}{6}$ est $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. Sans calculatrice, dire si les réels suivants sont des mesures principales en radians d'angles orientés

$$\frac{7\pi}{5} \qquad -\frac{13\pi}{5} \qquad \frac{\pi}{4} \qquad -\frac{3\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad -\frac{2\pi}{3} \qquad -\frac{7\pi}{6} \qquad \frac{37\pi}{36}$$

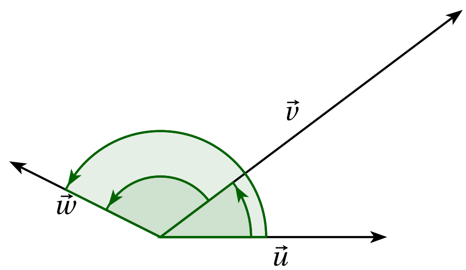
II.2. Propriétés

Propriété 2.

Relation de Chasles (admise) :
Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{w})=(\vec{u},\vec{w})(2\pi)$$

Illustration :



Exercice 5. Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, munie du repère orthonormée $(0,I,J)$, les points A et B sont tels que :

$$\widehat{IOA}=45^\circ \qquad \text{et } \widehat{IOB}=-120^\circ$$

Donner une mesure en radians des angles orientés :

1. $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$
2. $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$
3. $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$

Corollaire 1.

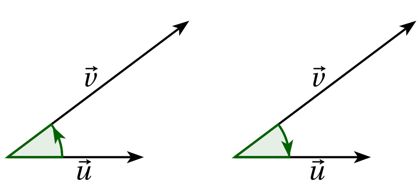
Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout $k\neq 0$ on a :

1. $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=-(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})(2\pi)$
2. $(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi(2\pi)$
3. $(k\overrightarrow{u},k\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})(2\pi)$
4. $(-\overrightarrow{u},-\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})(2\pi)$

Illustrations de cas particuliers :

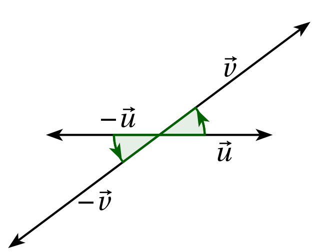
Angles Opposés :

$(\vec{u};\vec{v})=-(\vec{v};\vec{u}) \quad [2\pi]$



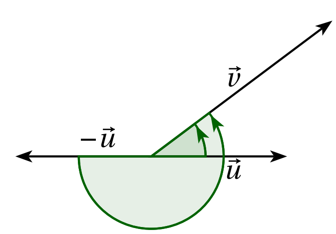
Angles égaux :

$(-\vec{u};-\vec{v})=(\vec{v};\vec{u}) \quad [2\pi]$



Angles supplémentaires :

$(-\vec{u};\vec{v})=\pi+(\vec{u};\vec{v}) \quad [2\pi]$



Preuve

1. D'après la relation de Chasles on a :

$$(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=(\vec{u},\vec{u})(2\pi)$$

Or $(\vec{u},\vec{u})(2\pi)=0(2\pi)$ d'où : $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=0(2\pi)$, et finalement :

$$(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=-(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})(2\pi)$$

2. D'après la relation de Chasles on a :

$$(-\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=(-\vec{u},\vec{u})(2\pi)$$

Or $(-\vec{u},\vec{u})(2\pi)=\pi(2\pi)$ d'où : $(-\vec{u},\vec{v})+(\vec{v},\vec{u})=\pi(2\pi)$, et finalement :

$$(-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})+\pi(2\pi)$$

3. En utilisant deux fois la relation de Chasles on a :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=(k\vec{u},\vec{u})+(\vec{u},\vec{v})+(\vec{v};k\vec{v})(2\pi)$$

<u>Cas 1</u> : $k>0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et donc : $(k\vec{u},\vec{u})=0(2\pi)$. De même $(\vec{v};k\vec{v})=0(2/pi)$, et donc :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})(2\pi)$$

<u>Cas 2</u> : $k<0$
Dans ce cas, les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ n'ont pas le même sens et donc : $(k\vec{u},\vec{u})=\pi(2\pi)$. De même $(\vec{v};k\vec{v})=\pi(2/pi)$, et donc :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=2\pi+(\vec{u},\vec{v})(2\pi)$$

ce qui donne :

$$(k\vec{u},k\vec{v})=(\vec{u},\vec{v})(2\pi)$$

4. On applique la propriété précédente pour $k=-1$

<u>Exercice</u> 6. ABC est un triangle de sens direct (ie que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est de mesure positive). Démontrer que la somme de ses angles orientés est égales à π.
Notons θ la somme des trois angles dans le sens direct. On a :

$$\theta=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$$

Comme $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})\quad[2\pi]$, on peut écrire :

$$\theta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\quad[2\pi]\iff\theta=(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB})(2\pi)=\pi\quad[2\pi]$$

Exemple :

Sachant que $(\vec{u};\vec{v})=\dfrac{3\pi}{4}$, déterminer la mesure principale de : $(2\vec{u};\vec{v})$ $(-\vec{v};2\vec{u})$ $(3\vec{v};-2\vec{u})$

Remarque : On peut désormais décrire la position d'un point M sur le cercle grâce à la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

Exercice 7. ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{\pi}{2}$

AEB et BCF sont des triangles équilatéraux tels que $(\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB})=\dfrac{\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{FC},\overrightarrow{FB})=\dfrac{\pi}{3}$

On se propose de démontrer que les points D, E et F sont alignés en utilisant les angles orientés

1. Faire un schéma de la situation.
2. (a) Démontrer que le triangle ADE est isocèle
   (b) Démontrer que $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EA})=\dfrac{5\pi}{12}$
3. Déterminer une mesure de $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BF})$ et en déduire une mesure de $(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF})$
4. (a) Utiliser la relation de Chasles pour calculer une mesure de $(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF})$
   (b) Que peut-on en déduire sur les points D , E et F ?

Exercice 8. A, B, C et D sont des points tels que : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{\pi}{12}\quad[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\dfrac{5\pi}{12}\quad[2\pi]$.

Démontrer que ACD est rectangle.

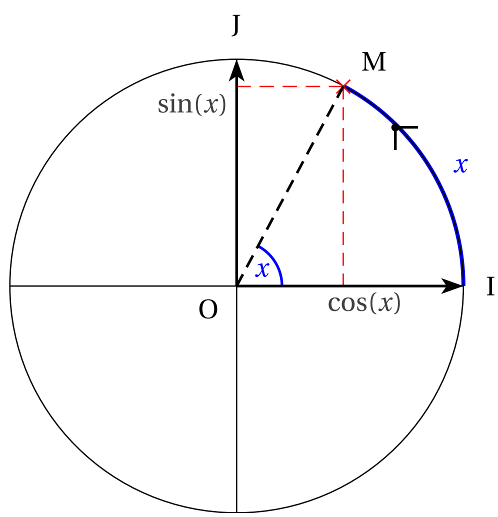
III. La trigonométrie

III.1. Définition du cosinus, sinus et de la tangente

III.1.a. Définition du cosinus et sinus d'un nombre réel et d'un angle orienté

Définition 5.

Soit $x\in\mathbb{R}$ et M son point associé sur le cercle $\mathscr{C}$.
On appelle **cosinus** de x, noté $\cos(x)$ l'abscisse de M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.
On appelle **sinus** de x, noté $\sin(x)$ son ordonnée dans le même repère.
Le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont le cosinus et sinus d'une quelconque de ses mesures.



Remarques :

- On vérifie aisément que cet définition coïncide avec celle donnée dans le triangle rectangle pour un angle θ tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
- On dispose désormais d'une troisème méthode pour décrire la position d'un point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

III.1.b. Définition de la tangente d'un nombre réel.

Définition 6.

On appelle tangente de θ, noté $\tan\theta$, l'ordonnée du point H dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Propriété 3.

Si $\cos\theta \neq 0$ on a :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Preuve

On applique le théorème de Thales et on obtient directement :

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{1} \iff \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Exercice 9. On donne $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}$

1. Soit $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{\tan x}$
2. En déduire que $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$

III.2. Cosinus, sinus et tangente d'un angle remarquable

Le tableau ci-dessous rappelle les valeurs remarquables du cosinus et du sinus pour des valeurs particulières d'un angle orienté θ (en radians).
Il est connaître par coeur.

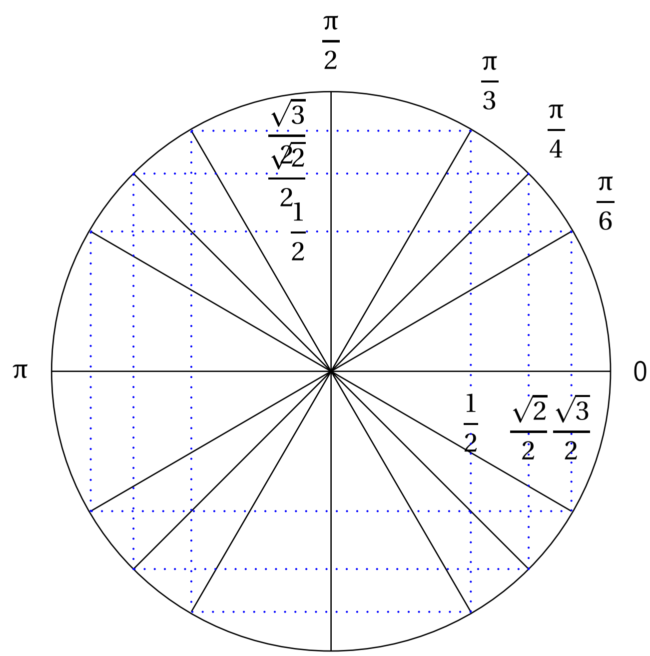
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas	0

Exercice 10. Grâce aux angles associés, trouver les valeurs des cosinus et sinus des angles suivants :

$\frac{3\pi}{4}$ $\qquad \frac{5\pi}{4}$ $\qquad -\frac{\pi}{4}$ $\qquad \frac{7\pi}{4}$

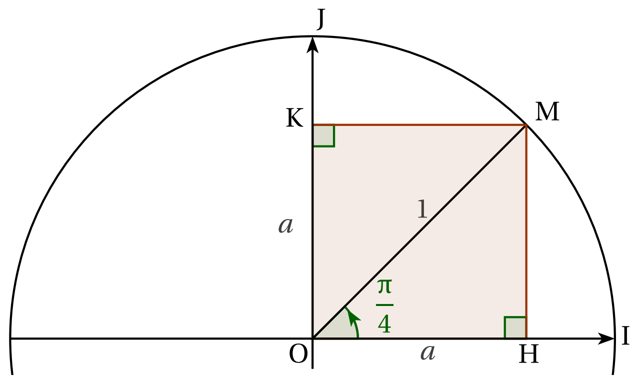
$-\frac{\pi}{3}$ $\qquad \frac{2\pi}{3}$ $\qquad -\frac{2\pi}{3}$ $\qquad \frac{5\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{6}$ $\qquad \frac{11\pi}{6}$ $\qquad -\frac{\pi}{6}$ $\qquad -\frac{5\pi}{6}$



Preuve

Pour calculer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{4}$ et de $\cos\frac{\pi}{4}$ on se place dans le quadrilatère OHMK ci-contre, de diagonale $\mathrm{OM}=1$.



On sait que OHMK est un carré, car il possède 4 angles droits et que l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{OH}};\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ mesure $\frac{\pi}{4}$. On appelle a la mesure de son côté.

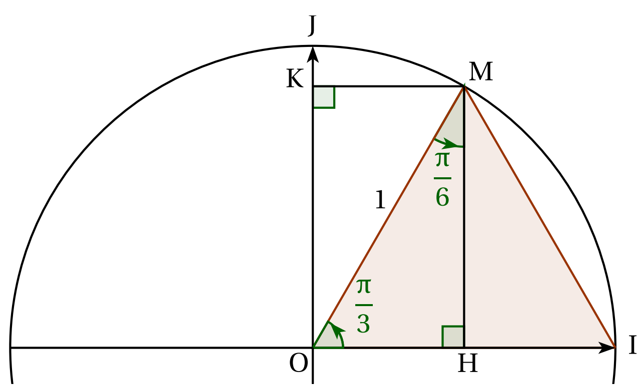
Par définition du cosinus et sinus d'un nombre réel, on a $a=\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}$. Cherchons cette valeur.

Dans le triangle OHM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{MH}^2 \iff 1^2=2a^2+a^2 \iff a^2=\frac{1}{2} \overset{a>0}{\iff} a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\boxed{\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Pour calculer les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on se place dans le triangle OIM ci-contre, de côté $\mathrm{OM}=1$.



On cherche $\mathrm{OH}=\cos\frac{\pi}{3}$ et $\mathrm{OK}=\sin\frac{\pi}{3}$.

On sait que le triangle OIM est équilatéral car $\mathrm{OM}=\mathrm{OI}$ et que $(\overrightarrow{\mathrm{OH}};\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ mesure $\frac{\pi}{3}$.

Donc sa hauteur [MH] est aussi sa médiane. D'où H est le milieu de [OI] et $\mathrm{OH}=\boxed{\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}}$.

De plus, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OHM rectangle en H on a :

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{MH}^2 \iff 1^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\mathrm{OK}^2 \iff \mathrm{OK}^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \overset{\mathrm{OK}>0}{\iff} \mathrm{OK}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\boxed{\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

De plus la hauteur [MH] du triangle OIM est aussi sa bissectrice donc $(\overrightarrow{\mathrm{MO}};\overrightarrow{\mathrm{MI}})=\frac{\pi}{6}\quad[2\pi]$.

On en déduit dans le triangle OHM rectangle en H que $\boxed{\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}}$

III.3. Relations trigonométriques

Propriété 4. (élémentaires du sinus et du cosinus)

1. Pour tout réel x on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Pythagore)
2. Pour tout réel x on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. Pour tout réel x on a $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exemple :

On donne $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On cherche la valeur de $\sin \frac{\pi}{12}$.

On sait que $\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 \iff \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ Donc

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{16} = \frac{16-8-2\times 2\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

De plus $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin \frac{\pi}{12} > 0$. On en déduit :

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

On peut également montrer que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ est une autre écriture du sinus, plus simple .

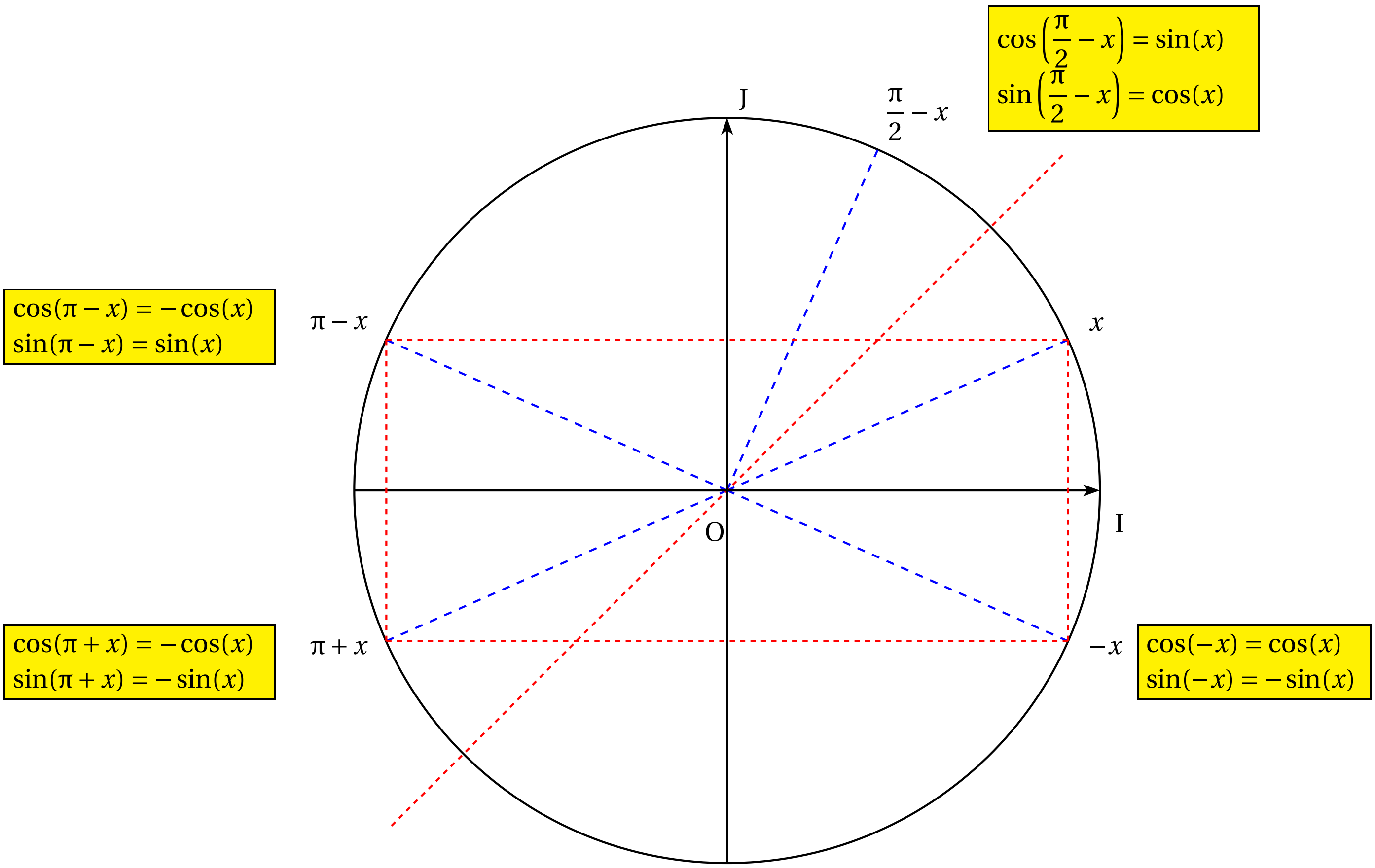
Propriété 5.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\cos\theta = \cos(-\theta)$
2. $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
3. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
4. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
5. $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
6. $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$
7. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
8. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
9. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
10. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

Preuve

On obtient cette propriété par une lecture astucieuse du cercle trigonométrique : Soit M le point associé à un réel x. Dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ on a $M(\cos(x);\sin(x))$.
Grâce à de nombreuses propriétés de symétrie sur le cercle $\mathscr{C}$, on peut déduire les coordonnées des points associés aux réels $-x$, $\pi-x$, $\pi+x$, $\frac{\pi}{2}-x$ et $\frac{\pi}{2}+x$ (donc la valeur de leur cosinus et sinus).
Sur le schéma ci-dessous, ces points permettent de définir ce que l'on appelle des angles associés.



Exercice 11. Simplifier les expressions suivantes : $\cos(-\pi-\theta)$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos^2(-x)+\sin^2(\pi-x)$

Exercice 12. Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes :

- $A=\cos(x+\pi)-\cos(-x)+5\cos(x)$
- $B=\sin(\pi-x)+2\sin(x+2\pi)+\sin(x+3\pi)$
- $C=\sin(\pi+x)cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)$
- $D=\sin(x+11\pi)+\sin(11\pi-x)-\cos(11\pi-x)$

III.4. Équations trigonométriques

Exercice 13.

Partie A : **Equation** $\cos x = a$

1. Soit l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ à résoudre dans $\mathbb{R}$.
   (a) Placer sur le cercle trigonométrique les points M et M′ d'abscisse $\frac{1}{2}$
   (b) Déterminer les mesures principales des angles $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'})$.
   En déduire l'ensemble des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.
2. (a) Par une méthode analogue, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) En déduire les solutions dans $[0;2\pi[$ de cette équation.
3. (a) Examiner le cas des équations $\cos x = 1.5$ et $\cos x = -3$.
   (b) Donner une condition sur a pour que l'équation $\cos x = a$ puisse admettre des solutions.
4. Soit l'équation $\cos x = 0.25$.
   (a) Sur le cercle trigonométrique, placer les images des solutions de l'équation.
   (b) On note θ la solution de cette équation dans $[0;\pi[$.
   Exprimer en fonction de θ les solutions de l'équation $\cos x = 0.25$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) Résoudre cette équation dans $[0;2\pi[$.
   Donner, à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de ces solutions à 10^{-4} près.

Partie B : **Equation** $\sin x = a$

1. En suivant la même méthode que dans la partie A, résoudre l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.
2. Même question pour $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donner ensuite les solutions de cette équation dans $[0;2\pi[$.
3. Soit l'équation $\sin x = 0.3$. On note α la solution de cette équation dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
   Exprimer en fonction de α les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = 0.3$.

Le cercle trigonométrique et la configuration des angles associés nous permettent de résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ où a est un réel connu.

Propriété 6.

L'équation $\cos x = \cos a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a+2k\pi$ et $x = -a+2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.
L'équation $\sin x = \sin a$ où $a \in \mathbb{R}$ admet pour solutions les nombres réels $x = a+2k\pi$ et $x = \pi-a+2k'\pi$ où k et k' sont des entiers relatifs.

Exemple :

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ et enfin dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes :

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin x = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad$ $\cos(2x) = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 14. À l'aide d'une figure, résoudre les équations et inéquations suivantes :

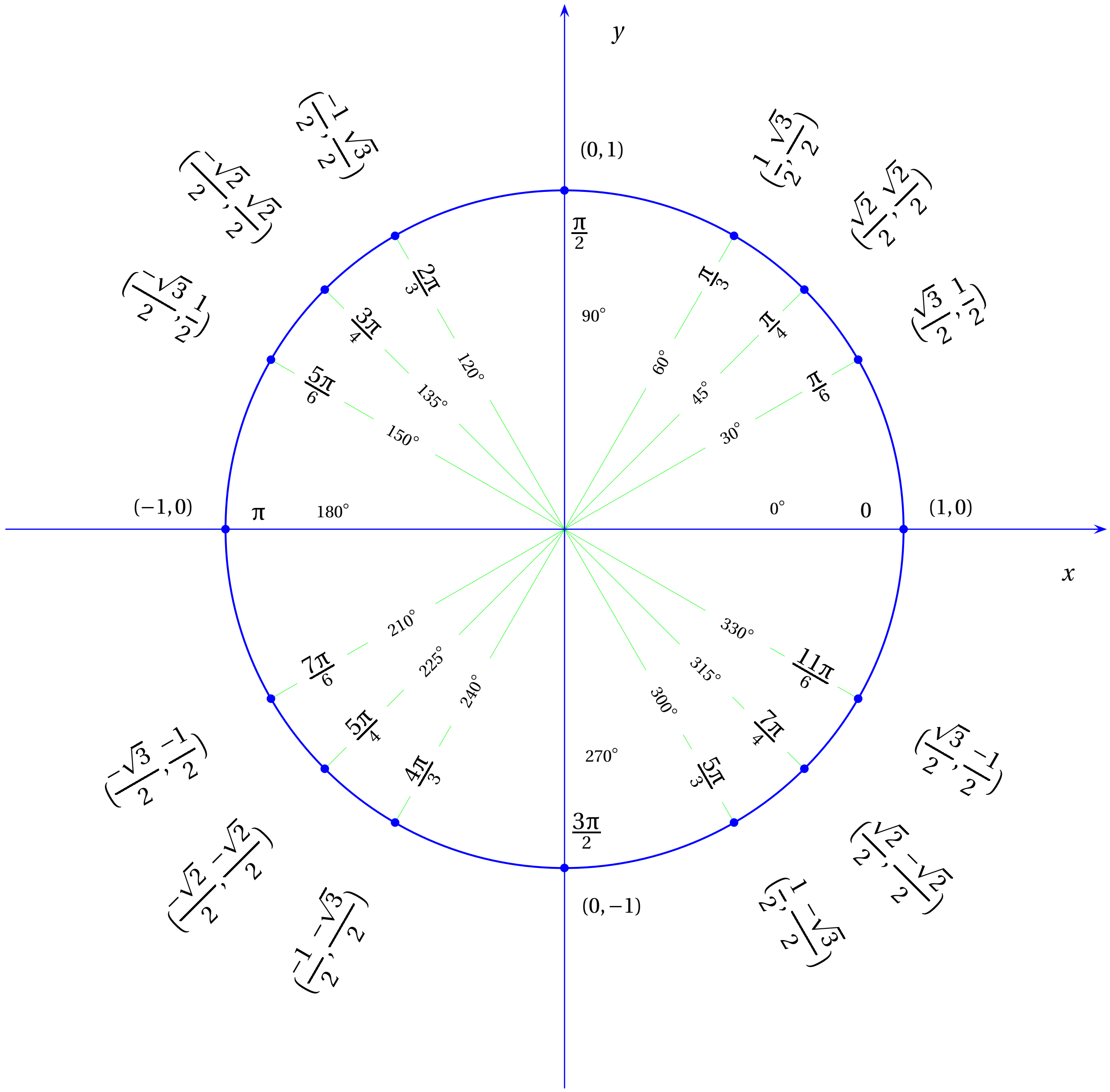
1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pour $x \in [0;2\pi[$
2. $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi[$
3. $\cos(x) \geq \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [-\pi;\pi[$
4. $\sin(x) < \dfrac{1}{2}$ pour $x \in [0;2\pi[$

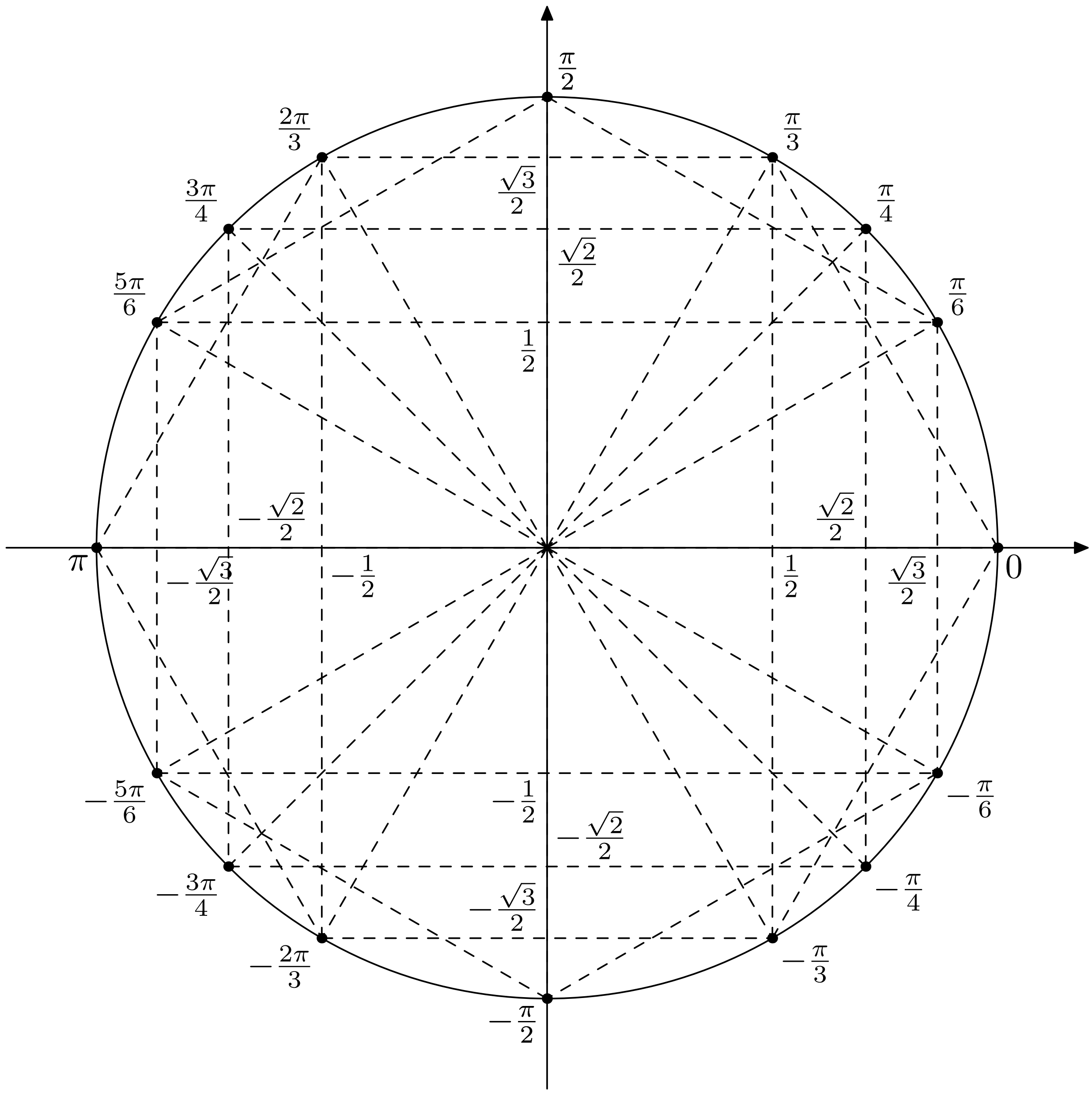
Exercice 15. On considère l'équation (E) : $\sin x = \cos \dfrac{\pi}{3}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)
2. Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E)

III.5. Cercle trigonométrique qui résume l'essentiel

Un cercle trigonométrique qui résume l'essentiel :





« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien