

Chapitre 6

Les suites, généralités



Hors Sujet



Titre : « Ashgar Farhadi »

Auteur : UNE SÉPARATION

Présentation succincte de l'auteur : Asghar Farhadi a fait ses études de théâtre, avec un diplôme du 1er cycle en arts dramatiques et une maîtrise de mise en scène théâtrale à l'Université de Téhéran et l'Université Tarbiat Modarres. Farhadi a tourné des courts métrages de 8 mm et 16 mm au Département de la société du cinéma de jeunesse d'Ispahan avant d'entamer l'écriture des pièces de théâtre et des scénarios pour la télévision iranienne, IRIB. Danse dans la poussière est son premier film réalisé, suivi par le film acclamé par les critiques, Les enfants de Belle Ville. Son troisième film, La Fête du feu obtient le Hugo d'or au Festival international du film de Chicago en 2006. À propos d'Elly, pour lequel il reçoit l'Ours d'argent du meilleur réalisateur à Berlin en 2009, prend pour sujet le voyage d'un groupe d'Iraniens au bord de la mer Caspienne tournant à la catastrophe. En 2011, Farhadi revient à la Berlinale pour y présenter Une séparation. Le film gagne l'Ours d'or et les Prix d'interprétation féminine et masculine pour l'ensemble de la distribution. Puis il reçoit, en 2012, le Golden Globe, le César et l'Oscar du meilleur film étranger.

Document réalisé à l'aide de L^AT_EX

Auteur : D. Zancanaro

Site : wicky-math.fr.nf

Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

I. Introduction	2
I.1. Introduction historique	2
I.2. Introduction	2
II. Suites numériques	4
II.1. Définition	4
II.2. Mode de génération d'une suite numérique	4
II.3. Représentation graphique	5
II.3.a. Suites explicites	5
II.3.b. Suites récurrentes	6
III. Sens de variation d'une suite numérique	9
III.1. Définition	9
III.2. Méthode : Comment étudier le sens de variation d'une suite ?	10
IV. Notion de limite d'une suite numérique	12
IV.1. Etude d'un exemple	12
IV.2. Suite convergente, suite divergente	12
IV.3. Application : limites et algorithmes	13
IV.3.a. Une suite qui diverge vers $-\infty$	13
IV.3.b. Une suite qui converge vers un réel ℓ	14

L'essentiel :

- ↪ Calculer les termes d'une suite générée par récurrence.
- ↪ Construire et exploiter la représentation graphique d'une suite définie par récurrence
- ↪ Algorithme

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »
JOHN LOUIS VON NEUMANN

Leçon 6

Les suites, généralités



Au fil du temps

Vous allez dans ce chapitre, découvrir les suites, qui sont présentes dans bien des sciences, par exemple en biologie des populations pour décrire le cycle de reproduction des lapins, en astronomie dans les lois de répartition des planètes, en physique dans la théorie des particules élémentaires, en informatique dans les algorithmes et simulations (et via les ordinateurs, dans toutes nos activités numériques). Mais cette omniprésence n'est pas un hasard, car tous ces domaines se servent d'équations mathématiques. Or les suites occupent une place de choix en mathématiques depuis plus de 2000 ans.

Pourquoi un tel intérêt, alors qu'il s'agit simplement de ranger une succession de nombres liés par un loi, comme quand on énumère les jours du mois ? Parce que cette simplicité n'est qu'apparente : l'étrange n'est jamais loin.

Prenons par exemple la suite des « puissances de un demi » : $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots$ et la série associée

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$. Si ces nombres représentaient des tiges en bois mesurant chacune la moitié de la précédente (en commençant par 1 mètre), n'est-ce pas étonnant que la longueur maximale qu'on puisse atteindre en les mettant bout à bout ne dépasse pas 2 mètres, même avec une infinité de tiges ? Cela a stupéfié les savants qui l'ont découvert au XVIII^e siècle. Comment admettre que l'infini (le nombre de tiges) puisse être contenu dans le fini (2 mètres) ? Il s'en est suivi de violentes disputes entre les pro-infini et les contre, qui n'ont fait que s'amplifier jusqu'au XX^e siècle. Bref, ce sont les suites qui ont introduit l'infini dans l'arithmétique et l'analyse ...

Mais si le XVIII^e siècle est un tournant dans l'histoire des suites et de l'infini, leur origine remonte à Archimède de Syracuse, le mathématicien grec du III^e siècle avant JC. Archimède voulait résoudre une question qui n'avait rien à voir avec l'infini, le problème de la quadrature du cercle, grande énigme des maths anciennes : étant donné un cercle, comment construire une figure de même surface mais composée de carrés ou de triangles (figures que les Grecs savaient bien mesurer). Tel était le but d'Archimède ... Mais à la place, il a découvert les suites et, sans le savoir, il a mis les mathématiciens sur la voie de l'infini.

Comment cela s'est-il produit ? Archimède pensait que la bonne méthode pour « quarrer » le cercle était de l'encadrer entre deux figures faites de triangles, puis de faire converger la taille de ces triangles jusqu'à les faire coïncider (comme si l'on cherchait à emprisonner un objet entre des murs qui se rapprochent). Archimède choisit comme figures connues et quarrables pour coïncider le cercle, les polygones réguliers, faits de triangles disposés en pétales de fleur, en commençant par l'hexagone (six côtés, six triangles équilatéraux) : il encadre le cercle entre l'hexagone inscrit et l'hexagone circonscrit. Ensuite, il passe au dodécagone (12 côtés), puis il enchaîne sur le polygone à 24 côtés, puis 48 et enfin 96. A chaque pas, les mesures se rapprochent, mais jamais elles ne s'égalent ... Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π .

Las, Archimède ne résoudra jamais le problème de la quadrature du cercle, et pour cause. Les mathématiciens du XIX^e siècle démontreront qu'il n'a pas de solution, d'où l'expression « C'est la quadrature du cercle ! ». Mais Archimède a bel et bien inauguré l'histoire des suites, car dans sa méthode, il montre comment calculer la surface du polygone n en fonction de celui qui précède (le $n-1$ ^{ème}). Le terme u_n défini par le terme u_{n-1} , c'est bien là une suite, la première du genre, et qui peut être prolongée autant que l'on veut ... jusque dans l'infini.

Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indiciale au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice. On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I. Introduction

I.1. Introduction historique

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'un certain Archimède (j'en entends déjà se dire d'ici : « encore lui ! », eh oui. . .). Dans son traité La mesure du cercle, pour trouver une valeur approchée de π , il inscrit dans un cercle de rayon 1 un triangle équilatéral dont il calcule le périmètre. Puis en doublant le nombres de côtés, il calcule le périmètre d'un hexagone, puis celui d'un dodécagone et ainsi de suite, indéfiniment. Il obtient ainsi une suite illimitée de nombres connus dont la limite est 2π et qui fournissent très rapidement une bonne approximation de π .

Plus tard, les suites furent formalisées par Cauchy, la maîtrise de cet outil a été grandement facilitée par l'adoption de la notation indicielle au XIX^e siècle qui consiste à noter chaque nombre d'une suite par une même lettre affectée d'un indice.

On doit à Péano la définition d'une suite numérique telle qu'elle est enseigné en première S.

I.2. Introduction

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres, comme par exemple :

- 1, 2, 4, 8, 16,
- 1, 4, 9, 16, 25,
- 3, 1, 5, 9,
- suite de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,
- suite de Stern 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4,

En mathématiques, une **suite** u est une **liste ordonnée de nombres réels** : les éléments de cette liste :

- ↪ Sont appelés **termes**
- ↪ Sont repérés par leur rang dans la liste

Le 1^{er} terme de la suite u est souvent noté u_0 (ou u_1),
 Le 2^{ème} terme de la suite u est souvent noté u_1 (ou u_2)

 Le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite u est souvent noté u_{n-1} (ou u_n)

Le terme précédent u_n est u_{n-1} , le suivant u_{n+1} .

On note $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour signifier que le rang d'un terme de la suite u est un entier naturel (sans "fin" de liste). On a donc :

$$\underbrace{u}_{\text{nom de la suite}} = (\underbrace{u_0}_{\text{1er terme}} ; \underbrace{u_1}_{\text{2nd terme}} ; u_2 ; \dots ; u_{n-1} ; \underbrace{u_n}_{\text{terme de rang } n} ; u_{n+1} ; \dots)$$

Exemple :

En reprenant les exemples précédents :

↪ La première suite est la suite des puissances de 2, on définit alors cette suite u par :

$$u_n = 2^n$$

Une autre manière de définir cette suite est de remarquer que chaque terme est le double du précédent ; on peut alors définir cette suite par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \end{cases}$$

↪ La seconde suite est la suite des carrés des premiers entiers, ainsi :

$$u_n = n^2$$

↪ La troisième suite admet pour premier terme -3 et pour calculer le suivant on ajoute toujours 4 :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$$

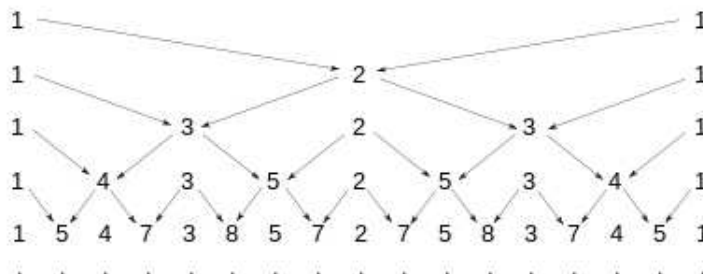
On peut aussi la définir de la manière suivante :

$$u_n = -3 + 4n$$

↪ La suite de Fibonacci se définit par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

↪ La suite de Stern se définit par :



Construction de la suite de Stern. La suite s'obtient en lisant chaque ligne successivement de gauche à droite. Les 1 de la colonne de droite sont à identifier avec les 1 de la colonne de gauche et ne sont pas pris en compte dans la liste des éléments de la suite.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{2n} = u_n \\ u_{2n+1} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$$

II. Suites numériques

II.1. Définition



Définition 1.

Une suite numérique est une suite liste ordonnée de nombre réels.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite u est en fait une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} définie à partir d'un certain entier p . A chaque entier $n \geq p$, la suite u associe un réel $u(n)$, que l'on note u_n .

u_n est appelé terme d'indice n ou de rang n de la suite. u_p est le premier terme, ou le terme initial de la suite. On note $(u_n)_{n \geq p}$ l'ensemble des termes de la suite.

Exercice 1. Déterminer le rang à partir duquel la suite u suivante est définie :

$$u_n = \sqrt{n-4}$$

II.2. Mode de génération d'une suite numérique

On distingue principalement deux manières de définir les suites : de manière explicite ou par récurrence.



Définition 2. (Formule explicite)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est définie de manière explicite lorsqu'il existe une fonction f définie sur $[p; +\infty[$ telle que :

$$\forall n \geq p, \text{ on a } u_n = f(n)$$



Exemple :

On se donne $u_n = -2n + 1$ pour $n \geq 0$ (ici $u_n = f(n)$ avec f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x + 1$.)

On a ainsi $u_0 = -2 \times 0 + 1 = 1$, $u_1 = -2 \times 1 + 1 = -1$, $u_2 = -2 \times 2 + 1 = -3$, $u_3 = -6 + 1 = -5$, $u_4 = -8 + 1 = -7$,
 $\dots u_{100} = -199 \dots$, etc

Remarque : On peut alors calculer chaque terme de la suite par rapport à son indice.



Définition 3. (Par récurrence)

Soit f une fonction définie sur un ensemble I telle que si $x \in I$ alors $f(x) \in I$.

Soit a un nombre réel de I et $p \in \mathbb{N}$.

On peut alors définir une suite u en posant :

$$\begin{cases} u_p = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \geq p \end{cases}$$


Exemple :

On se donne $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$ (ici $u_n = f(n)$ avec f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -2x + 1$.)

On a ainsi $u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 1 + 1 = -1$, $u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times (-1) + 1 = 3$, $u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 3 + 1 = -5$, etc

Remarques :

- ↪ En fait on se donne la valeur du premier terme et un procédé appelé **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent.
- ↪ On visualise ainsi facilement le lien logique entre les termes.
- ↪ Dans l'exemple précédent, pour calculer u_{100} , il faut connaître u_{99} , et pour calculer u_{99} , il faut connaître u_{98} , ainsi de suite ... Il est alors préférable d'exprimer u_n en fonction de n pour calculer u_{100} directement.

**Avec une calculatrice****Avec une TI :**

Par défaut, la calculatrice est en mode fonction. Il faut passer en mode *suite* en appuyant sur **Mode**

puis mettre **Suite** en surbrillance.

Pour entrer l'expression de la suite (u_n), on procède désormais comme pour une fonction : on appuie sur **f(x)** ce qui nous permet d'entrer le premier indice, l'expression de la suite et éventuellement son premier terme.

Le n s'obtient avec la touche **x, t, θ, n** et le u s'obtient en appuyant sur **2nde** + **7** (on met l'indice entre parenthèses).

On obtient le tableau de valeurs dans

$$\text{Table} = \text{2nde} + \text{Graphe}$$

Avec une Casio :

On choisit le mode *suite* en sélectionnant le menu **Recur**.

On choisit ensuite le type de suite (explicite ou récurrente) grâce à la touche **F3 : Type** puis la touche **F1** (explicite) ou **F2** (récurrente).

On entre ensuite l'expression de la suite et on appuie sur **F5 : SET** pour paramétrer le tableau, notamment donner le premier indice et/ou premier terme si nécessaire.

Le n s'obtient avec la touche **F1 : n** et le a_n s'obtient avec la touche **F2 : a_n**

On peut alors afficher les valeurs de la table grâce à **F6 : TABL**

Exercice 2. Soit la suite $(v_n)_\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n + 3n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
2. Exprimer v_n , v_{n-1} , v_{2n} et v_{3n-1} en fonction du terme approprié de la suite (v_n) .

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ définie par $u_n = (-2)^n + 3$ et la suite $(v_n)_\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = -2v_n + 9 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Pour chacune des suites u et v :
 - (a) Déterminer les valeurs des trois premiers termes.
 - (b) Vérifier à la calculatrice les réponses de la question précédente.
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur les suites u et v ? Démontrer cette conjecture.

II.3. Représentation graphique**II.3.a. Suites explicites****Définition 4.**

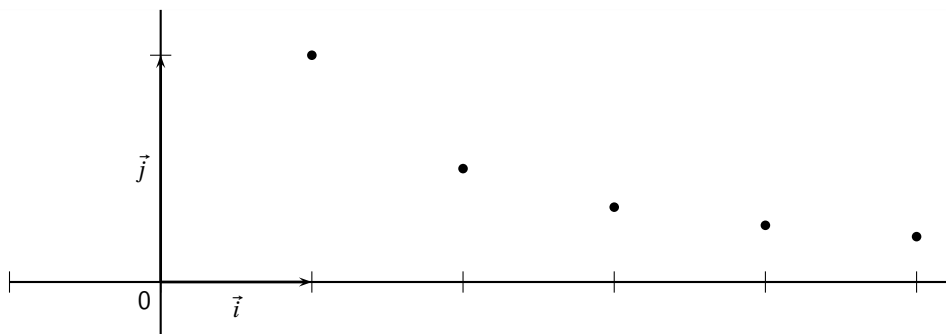
On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La représentation graphique d'une suite définie explicitement (u_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n; u_n)$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n}$$

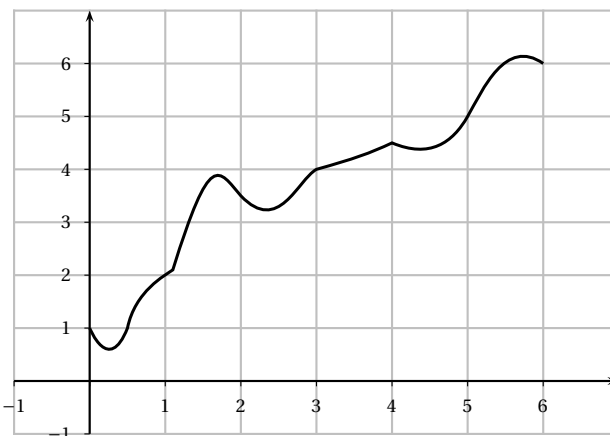
Sa représentation graphique est donc l'ensemble des points **isolés** de coordonnées $(1; 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{1}{3})$, $(4, \frac{1}{4})$, $(5, \frac{1}{5})$, etc...



Exercice 4.

Soit f la fonction définie par sa courbe représentative \mathcal{C}_f ci-contre et la suite u de terme général $u_n = f(n)$.

1. Lire une valeur approchée des termes de u_0 à u_5 .
2. Que peut-on dire du comportement des premiers termes de u ?



II.3.b. Suites récurrentes

Exercice 5. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n}$.

PARTIE A.

Tracer les premiers termes sur l'axe des abscisses

1. Tracer soigneusement la courbe \mathcal{C} représentant f et la droite Δ d'équation $y = x$ sur $[0; 3]$ dans un repère ortho-normé avec pour unité 5 cm.
2. (a) Placer u_0 sur l'axe des abscisses. Placer $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
(b) Placer le point A_1 de Δ d'ordonnée u_1 . Quelle est son abscisse ?
Placer alors u_1 sur l'axe des abscisses.
(c) Sachant que $u_2 = f(u_1)$, expliquer comment construire u_2 sur l'axe des abscisses. Le construire.
3. Construire ainsi, pas à pas, sur l'axe des abscisses, les premiers termes de la suite jusqu'à u_5 .
4. Comment se poursuivrait le tracé si on pouvait agrandir le graphique ?
Emettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n) .

PARTIE B.

Influence du premier terme

1. Sur votre calculatrice, afficher de même les premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.1$ et pour tout n , $v_{n+1} = f(v_n)$.
Dans **Fenêtre**, choisir X et Y entre 0 et 1.

2. Emettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n) .

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne cherche pas en général à représenter graphiquement la suite comme pour les suites explicites (mais on pourrait très bien le faire).

On préfère représenter ses premiers termes sur l'axe des abscisses en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction définissant la relation de récurrence.

On obtient alors un diagramme « en escalier » ou en « en escargot ».

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ et $u_0 = 1$

On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$.

1. On trace la courbe \mathcal{C}_f représentative de f

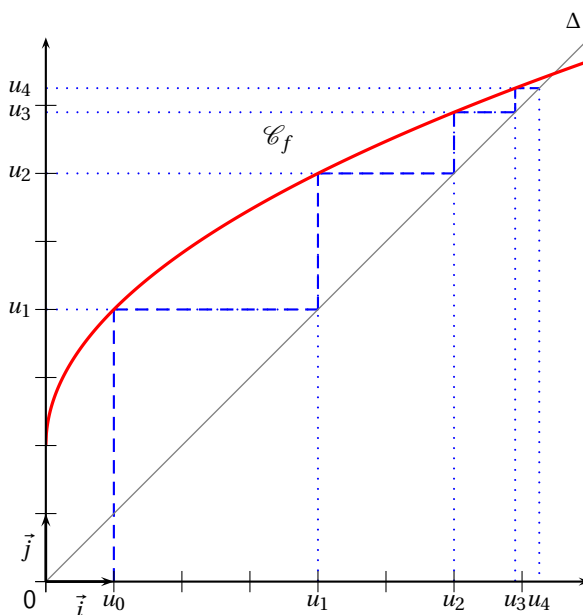
2. On place u_0 sur l'axe des abscisses et u_1 , image de u_0 par f , sur l'axe des ordonnées

3. Comme u_2 est l'image de u_1 par f , on veut avoir u_1 sur l'axe des abscisses.

Pour cela, on utilise la droite Δ d'équation $y = x$, que l'on prendra soin de tracer.

4. On reporte alors u_1 sur l'axe des abscisses, à l'aide de Δ

5. On place u_2 image de u_1 par f , puis on reporte u_2 sur l'axe des abscisses, etc.



Remarque : Dans l'exemple précédent, on constate que les termes de la suite semblent augmenter et se rapprocher d'une valeur « limite » : celle de l'abscisse du point d'intersection entre \mathcal{C}_f et de Δ .

On dira que la suite est croissante et qu'elle converge vers cette valeur l , appelée limite de la suite (u_n) .

Pour la trouver, on résout l'équation $f(l) = l$:

$$f(l) = l \iff 2\sqrt{l} + 2 = l \iff 2\sqrt{l} = l - 2 \iff 4l = l^2 - 4l + 4 \quad \text{et} \quad \begin{cases} l > 0 \\ l - 2 > 0 \end{cases} \iff l^2 - 8l + 4 = 0 \quad \text{et} \quad l > 2$$

$$\Delta = 64 - 4 \times 1 \times 4 = 48. \quad \text{Donc } l_1 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \text{ et } l_2 = 4 - 2\sqrt{3} < 2. \quad \text{Donc } l = 4 + 2\sqrt{3}.$$

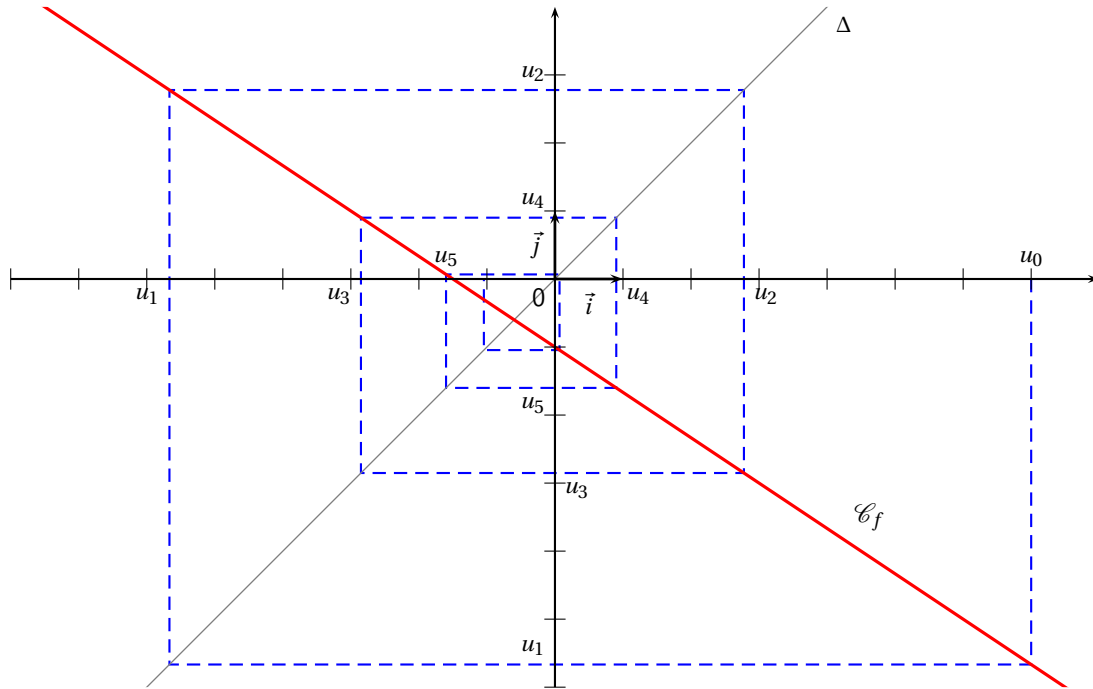
$$\text{On note } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4 + 2\sqrt{3}$$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n - 1$ et $u_0 = 7$

On considère la fonction f vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ définie par $f : x \mapsto -\frac{2}{3}x - 1$.

On a représenté ci-dessous la représentation graphique \mathcal{C}_f de f et la droite Δ d'équation $y = x$, puis on a suivi les mêmes étapes que pour l'exemple précédent.



Remarque : Contrairement à l'exemple précédent, les éléments de la suite ne semblent pas faire qu'augmenter ou diminuer. Cette suite n'est ni croissante, ni décroissante. Mais cette suite semble également convergente vers l'abscisse l du point d'intersection de \mathcal{C}_f et Δ .

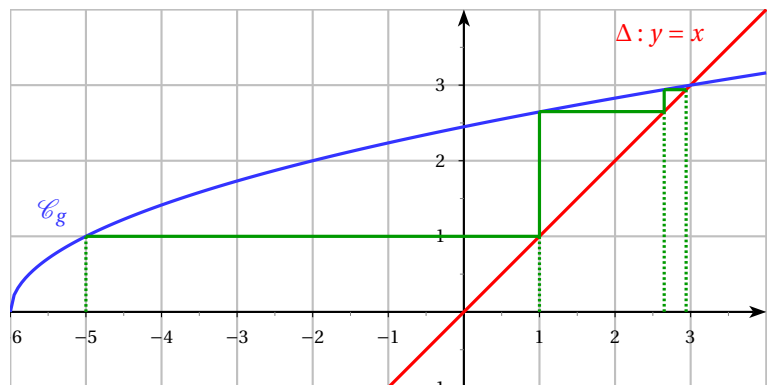
Pour trouver l , on résout $f(l) = l \iff -\frac{2}{3}l - 1 = l \iff \frac{5}{3}l = -1 \iff l = -\frac{3}{5}$.

Exercice 6.

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction g et la droite $\Delta : y = x$.
On a représenté les quatre premiers termes de la suite t définie par son terme initial t_0 et la relation

$$t_{n+1} = g(t_n) \quad \text{pour tout entier } n \geq 0$$

Donner le terme initial t_0 et lire des valeurs approchées de t_1, t_2 et t_3 .



Avec une calculatrice

Avec une TI :

Se mettre en Mode **Suite**.

► **Pour une suite explicite :**

- Mettre en surbrillance le Mode **NonRelié** afin que les points ne soient pas reliés entre eux.
- Rentrer la suite dans **f(x)** en précisant l'indice de départ.
- Dans **Format : 2nde + Zoom** mettre en surbrillance **f(n)**.

► **Pour une suite récurrente :**

- Mettre en surbrillance le Mode **Relié**.
- Rentrer la suite dans **f(x)** en précisant l'indice de départ, $u(n)$ en fonction des termes précédents appropriés et le premier terme.
- Aller dans **Format : 2nde + Zoom** et mettre en surbrillance **Esc** (en escalier).

Ensuite, appuyer sur **Graph**, puis **Trace** et les flèches **▷** et **◁** pour voir les termes de la suite.

Afin d'ajuster la fenêtre automatiquement, appuyer sur **Zoom** et choisir **ZMinMax**.

Avec une Casio :

Se mettre en *Mode suite*.

Enregistrer la suite dans le bon *Type*.

Appuyer ensuite sur la touche **F4 : WEB** ou encore **F6 : TABL** + **F6 : G-PLT**.

Afin d'ajuster la fenêtre automatiquement, appuyer sur **F2 : Zoom** et choisir **AUTO**.

Exercice 7.

1. Soit la suite u définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 6} \end{cases}$$

Afficher sur votre calculatrice une représentation graphique de la suite u .

2. Même question pour la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = \sqrt{2n + 6}$.

III. Sens de variation d'une suite numérique

III.1. Définition

Exercice 8. Soient les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = 2n + 3 \quad v_n = 5 \times 0.8^n \quad w_n = 5 \times (-0.8)^n \quad \text{et} \quad \begin{cases} t_0 = 4 \\ t_{n+1} = t_n - 3 \end{cases}$$

Comparer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les termes suivants :

1. u_{n+1} et u_n . 2. v_{n+1} et v_n . 3. w_{n+1} et w_n . 4. t_{n+1} et t_n .

**Définition 5.**

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On dit que la suite (u_n) est

↪ **croissante** (à partir du rang p) si et seulement $u_n \leq u_{n+1}, \forall n \geq p$.

↪ **décroissante** (à partir du rang p) si et seulement $u_n \geq u_{n+1}, \forall n \geq p$.

↪ **monotone** (à partir du rang p) si et seulement elle est croissante ou décroissante (à partir du rang p)

↪ **stationnaire** (à partir du rang p) si et seulement si $u_n = u_{n+1}$ pour tout entier $n \geq p$ (si la suite est définie à partir du rang p alors on dit que la suite est **constante**)

Remarque : On définit la stricte croissance ou décroissance à l'aide des inégalités strictes suivantes :

$$u_n < u_{n+1} \text{ ou } u_n > u_{n+1}$$

III.2. Méthode : Comment étudier le sens de variation d'une suite ?**Méthodes pour étudier les variations d'une suite**

► On étudie généralement le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de n .

► Si tous les termes de la suite u sont **strictement positifs**, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Ceci se révèle souvent pratique dans le cas où il y a des exposants n dans l'expression de la suite.

**Exemples :**

1. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2 + 2$, alors on a

$$u_{n+1} = (n+1)^2 + 2 = n^2 + 2n + 3$$

Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$ pour tout $n > 0$.

Donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur \mathbb{N} .

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2 \times 5^n$.

On a $v_n > 0$ pour tout entier naturel n et

$$v_{n+1} = 2 \times 5^{n+1}$$

Ainsi pour tout n on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 > 1$$

Donc $v_{n+1} > v_n$ pour tout n : la suite est donc strictement croissante sur $\llbracket 0, +\infty[$

3. Etudier de deux manières différentes le sens de variation de la suite $(w_n)_{n \geq 3}$ définie par

$$w_n = \frac{3n-1}{n+2}$$

**Théorème 1.**

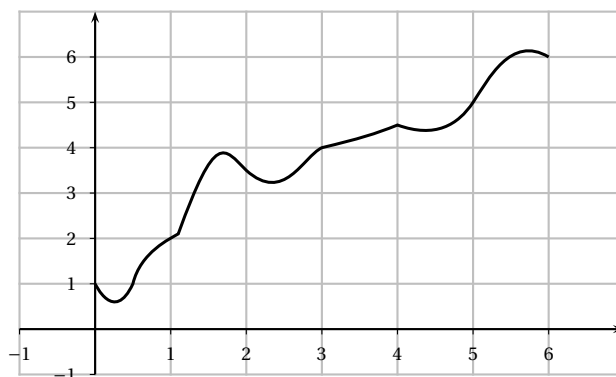
On considère la suite $(u_n)_{n \geq p}$ définie **explicitement** par $u_n = f(n)$, avec f définie sur l'intervalle $[p; +\infty[$.

Si la fonction f est monotone (resp. strictement monotone) sur $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) est monotone (resp. strictement monotone) et possède le même sens de variation que la fonction f

Remarques :

↪ On a déjà vu graphiquement que ce théorème était faux pour les suites définies par récurrence.

↪ La réciproque de ce théorème est fautive i.e que l'on peut trouver une suite croissante, par exemple, définie par une fonction non croissante, comme sur le dessin ci-dessous :



Preuve

On a $p \leq n < n+1$ donc si f est strictement croissante sur $[p; +\infty[$, on a par définition :

$$f(n) < f(n+1) \iff u_n < u_{n+1}$$

Par conséquent, (u_n) est strictement croissante.

De la même manière, si f est strictement décroissante sur $[p; +\infty[$, on a

$$f(n) > f(n+1) \iff u_n > u_{n+1}$$

Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante.

Exemples :

Etudier avec cette troisième méthode le sens de variation des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \geq 3}$ définies dans l'exemple précédent.

↪ Soit $f : x \mapsto x^2 + 2$; définie sur $[0; +\infty[$.

f est une fonction trinôme et sait qu'elle est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc (u_n) est aussi strictement croissante sur \mathbb{N} .

↪ Soit $g : x \mapsto \frac{3x-1}{x+2}$; définie sur $[3; +\infty[$.

$$\text{On a } g(x) = \frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x+2} = 3 \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} + \left(-\frac{1}{x+2} \right).$$

Or on a

x	3	$+\infty$
Variations de $1 + \frac{2}{x}$	↘	
Variations de $\frac{1}{1 + \frac{2}{x}}$	↗	
Variations de $3 \frac{1}{1 + \frac{2}{x}}$	↗	

et

x	3	$+\infty$
Variations de $x+2$	↗	
Variations de $\frac{1}{x+2}$	↘	
Variations de $-\frac{1}{x+2}$	↗	

Or la somme de fonctions croissantes est croissante. Donc g est croissante sur $[3; +\infty[$. On en conclut que $(w_n)_{n \geq 3}$ est aussi strictement croissante pour $n \geq 3$.

IV. Notion de limite d'une suite numérique

IV.1. Etude d'un exemple

Exercice 9. Soient les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = \frac{1}{n} \quad v_n = n^2 - 3 \quad w_n = (-1)^n$$

1. Etudier le sens de variation de chacune de ces suites.
2. Conjecturer graphiquement le « comportement à l'infini » de ces suites.
3. (a) Déterminer un entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, on ait $0 \leq u_n \leq 10^{-6}$.
 (b) Peut-on faire de même en remplaçant 10^{-6} par n'importe quel réel $\epsilon > 0$?
4. (a) Déterminer un entier p' tel que pour tout entier $n \geq p'$, on ait $v_n \geq 10^{10}$.
 (b) Peut-on faire de même en remplaçant 10^{10} par n'importe quel réel M ?

IV.2. Suite convergente, suite divergente



Définition 6.

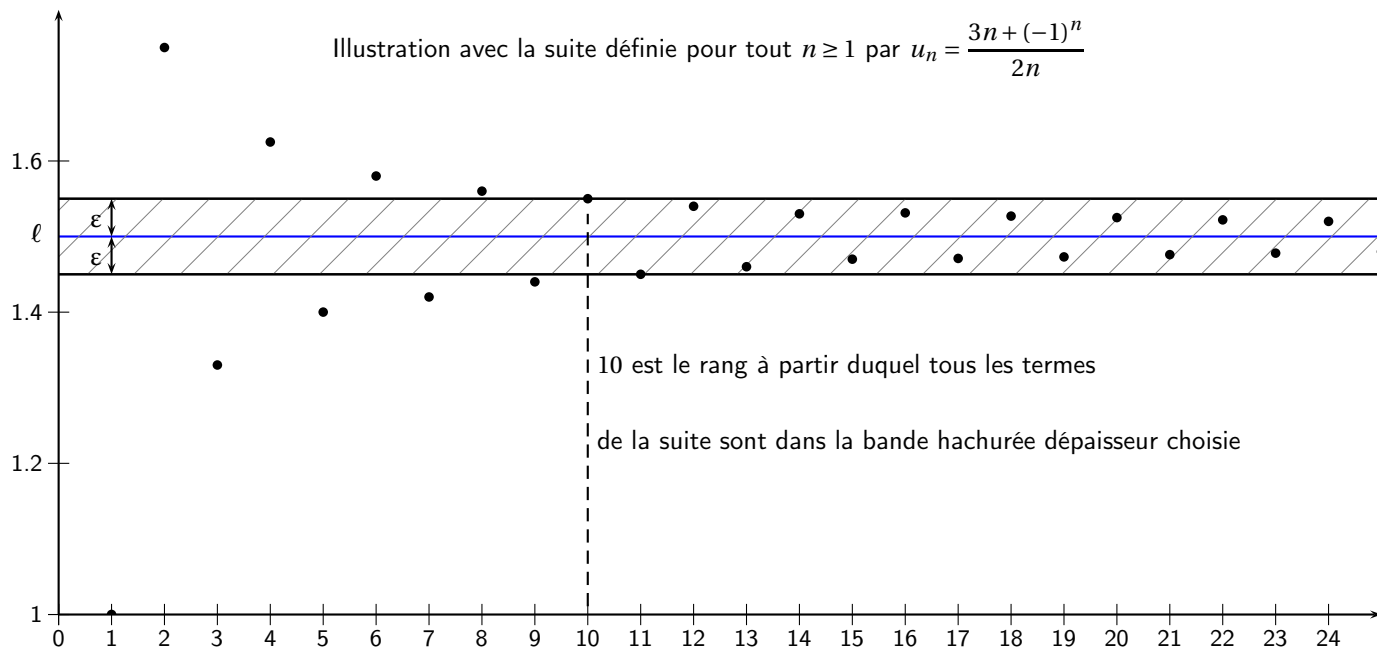
On dit qu'une suite **admet une limite réelle** ℓ (ou **converge vers le réel** ℓ) lorsque tous les termes de la suite (u_n) sont aussi proches de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.
 Autrement dit une suite converge vers le réel ℓ si tout intervalle du type $] \ell - \epsilon ; \ell + \epsilon [$ (avec $\epsilon > 0$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N . On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Remarque : Autrement dit, quelque soit le nombre ϵ choisi (aussi petit que l'on veut), il existe un rang N (dépendant de ϵ) à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont contenus dans l'intervalle $] \ell - \epsilon ; \ell + \epsilon [$.



Exemple :

Graphiquement, cela se traduit ainsi :



- ↪ Le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{3}{2}$
- ↪ Ici on a choisi $\varepsilon = 0.05$ et on a trouvé que pour $N = 10$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.45; 1.55[$ pour $n \geq 10$.
- ↪ Si on avait choisi $\varepsilon = 0.1$, on aurait trouvé que pour $N = 5$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.4; 1.6[$ pour $n \geq 5$.
- ↪ Si on avait choisi $\varepsilon = 0.04$, on aurait trouvé que pour $N = 13$, tous les termes de la suite (u_n) étaient dans l'intervalle $]1.46; 1.54[$ pour $n \geq 13$.

**Définition 7.**

On dit qu'une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

C'est le cas des suites qui n'admettent pas de limite, et des suites qui sont aussi grandes que l'on veut, dans les positifs ou négatifs, à partir d'un certain rang.

Dans ce dernier cas, on dit que la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

**Exemples :**

Conjecturer graphiquement les limites éventuelles des suites (u_n) , (v_n) , (w_n) et (t_n) définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = 4n^2 + 5n - 1 \quad v_n = -\frac{1}{n+2} + 1 \quad w_n = -2n^2 + 2 \quad \text{et} \quad t_n = \cos(n) + 1$$

IV.3. Application : limites et algorithmes**IV.3.a. Une suite qui diverge vers $-\infty$**

Exercice 10. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$$

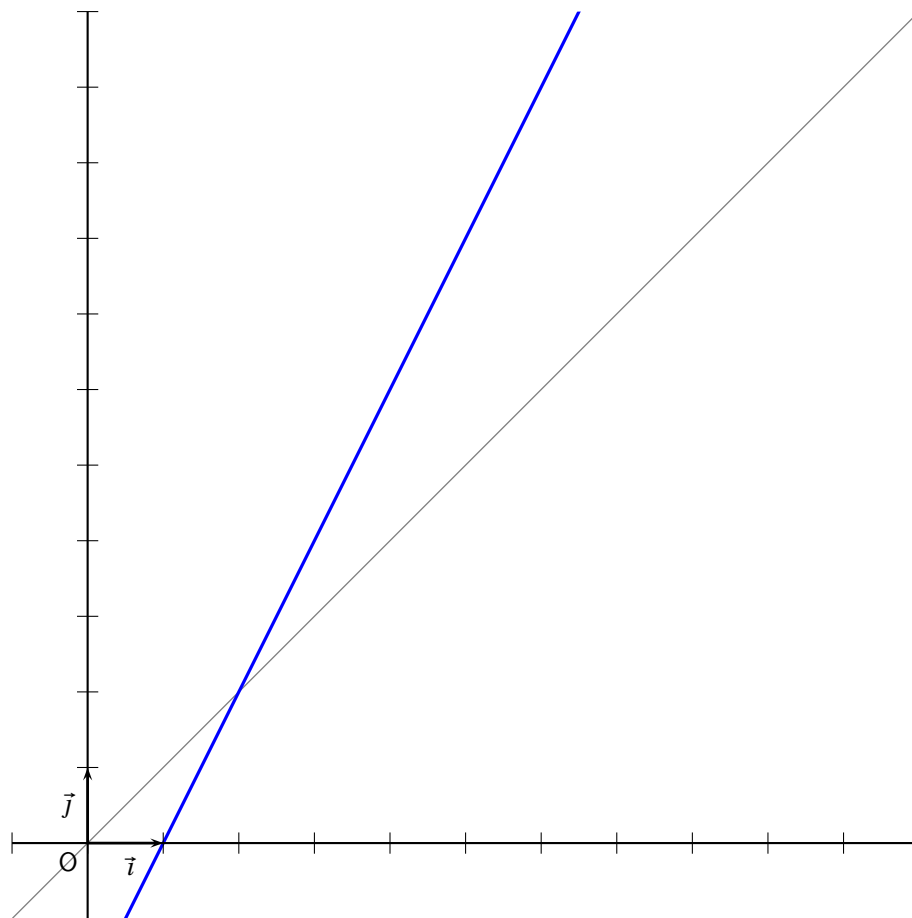
1. A l'aide des droites $\mathcal{D} : y = x$ et $\mathcal{D}' : y = 2x - 2$ donnée ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses les termes de u_0 à u_3 .
2. Conjecturer la limite de la suite u .
3. Calculer les 4 premiers termes de la suite u .

**Algorithme 1 :**

Données: u est un nombre réel.
 p est un nombre entier naturel.
 A est un nombre réel strictement positif. $u := 1$
 et $p := 0$
 Entrer A
Tant que ($u > -A$) **Faire**
 $u := 2u - 2$ et $p := p + 1$
Fin Tant que
 Afficher p .

4.

- (a) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $A = 30$?
- (b) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $A = 100$? s'il entre $A = 10000$?



IV.3.b. Une suite qui converge vers un réel ℓ

Exercice 11. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2 - \frac{1}{n+1}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite, conjecturer son sens de variation et sa limite ℓ .
2. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$$

3. En déduire que la suite est strictement croissante.
4. On considère l'algorithme suivant :



Algorithme 2 :

Données: u est un nombre réel.
 p est un nombre entier naturel.
 ε est un nombre réel strictement positif. $u := 1$
 et $p := 0$
 Entrer ε
Tant que ($u \notin]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$) **Faire**
 $p := p + 1$ et $u := 2 - \frac{1}{p+1}$
Fin Tant que
 Afficher p .

- (a) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $\varepsilon = 0,3$?
(b) Qu'affiche cet algorithme si l'utilisateur entre $\varepsilon = 0,1$? s'il entre $\varepsilon = 0,01$?
(c) Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer le rang p à partir duquel

$$u_p \in]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$$

- (d) Conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$