Chapitre 9

Suites arithmétiques et géométriques

Hors Sujet

Titre : « Postal Service »
Auteur : Give Up
Présentation succinte de l'auteur : The Postal Service est un groupe indépendant de musique électro-indie composé du chanteur de Death Cab For Cutie, Benjamin Gibbard, et du producteur Jimmy Tamborello. Le duo n'a qu'un album, devenu mythique, Give Up, paru en 2003. Give Up est paru le 18 février 2003, et a été suivi d'une tournée, nonobstant le fait que les deux artistes poursuivaient leur travail respectif avec leurs projets principaux. Le disque, unique album de The Postal Service à ce jour, est devenu l'album le plus populaire de l'étiquette Sub Pop depuis Bleach de Nirvana2. En plus de Ben Gibbard au chant, on retrouve sur Give Up les voix invitées de Jenny Lewis (chanteuse du groupe Rilo Kiley) et de Jen Wood. L'album fut produit par le guitariste de Death Cab For Cutie, Chris Walla, qui joue également de la guitare et du piano sur certains morceaux.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

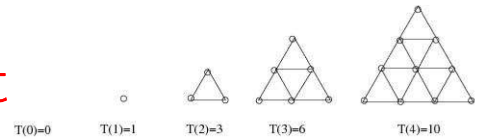
- $\rightsquigarrow$ Connaître et savoir appliquer les formules sur les suites arithmétiques ;
- $\rightsquigarrow$ Connaître et savoir appliquer les formules sur les suites arithmétiques.

« Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée ! »

John Louis von Neumann

Leçon 9

Suites arithmétiques et géométriques



Nombres triangulaires

I. Suite Arithmétique

I.1. Découverte des suites arithmétiques au travers d'un exemple

Exercice 1. Dans le pays des merveilles d'Alice, le lapin blanc, depuis le temps, a fait des enfants (enfin des adolescents plutôt...). Du plus vieux au plus jeune : le lapin bleu, le lapin rouge, le lapin vert et le lapin noir. A l'adolescence chacun des 4 lapins a réclamé de l'argent de poche. Noter que les lapins du pays des merveilles sont adolescents de 0 à 4 ans, ils deviennent enfants par la suite et n'ont jamais été adultes.
Le lapin blanc a décidé de donner au lapin bleu dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

- 3 carottes la première semaine ;
- Chaque semaine deux carottes de plus que la semaine précédente.

On admet qu'au pays des merveilles chaque année est constituée d'exactement 52 *semaines et chaque mois de* 4 *semaines. Remarquons que les lapins du pays des merveilles ont un treizième mois...*
On note $u_0 = 3$ et u_n le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour où il fête ses n semaines.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; calculer u_1 ; u_2 et u_3. Combien de carottes le lapin bleu a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant u_n en fonction de n. Vérifier cette formule en recalculant u_1 ; u_2 et u_3.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
   (a) A partir de quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
   (b) Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin bleu au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{207} = \sum_{i=0}^{i=207} u_i$$
   (c) Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin bleu (fort économe) met toutes les autres de côté.
   Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin bleu.
   (d) Grand amateur de montre, le lapin bleu décide de troquer ses carottes contre des montres au cours suivant, 1 montre contre 540 carottes. Déterminer le nombre de montres que le lapin bleu a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

I.2. Définition

Définition 1.

Une suite arithmétique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant en lui ajoutant la même constante appelée raison.
Si on note u une suite arithmétique de raison r définie pour tout entier n on a donc, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

La suite des entiers naturels pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2

Remarque : Si u est suite arithmétique de raison r alors pour tout n on a :

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$$

Si la raison $r > 0$ alors la suite arithmétique est strictement croissante, au contraire si $r < 0$ la suite arithmétique est strictement décroissante. Dans le cas où $r = 0$ il s'agit d'une suite constante.

Exercice 2. Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Dans le cas d'une réponse positive préciser leur raison et leur sens de variation.

1. $u_n = 3n - 2$
2. $u_n = n^2 - 3$
3. $u_n = -4n + 1$

I.3. Expression explicite en fonction de n

On considère une suite arithmétique u de raison r et de premier terme u_0, on a alors :

$$\begin{aligned}
& u_1 = u_0 + r \\
\Longrightarrow\ & u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r \\
\Longrightarrow\ & u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r \\
\Longrightarrow\ & u_4 = u_3 + r = u_0 + 3r + r = u_0 + 4r \\
\Longrightarrow\ & \ldots\ldots\ldots \\
\Longrightarrow\ & u_n = u_{n-1} + r = u_0 + (n-1)r + r = u_0 + nr
\end{aligned}$$

Propriété 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors

$$u_n = u_0 + nr$$

Exercice 3. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calculer u_{2013}

Théorème 1.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Preuve

D'après la propriété précédente on a pour tous p et n de $\mathbb{N}$:

$$u_p = u_0 + pr \qquad \text{et} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Par conséquent

$$u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr = (n-p)r \iff u_n = u_p + (n-p)r$$

Exercice 4. Considérons une suite arithmétique (v_n) telle que $v_{27} = 6$ et $v_{39} = 10$
Calculer v_7 et v_{74}

Théorème 2.

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ où a et b sont deux réels.
(u_n) est une suite arithmétique de raison a

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - an - b = a$$

I.4. Somme de termes successifs

Remarque : Soit (u_n) une suite. La somme $u_1 + u_2$ comporte deux termes, de même la somme $u_1 + u_2 + u_3$ en comporte 3. De manière générale la somme $u_1 + u_2 + \dots u_p$ comporte p termes.
Combien en comporte la somme :$u_{14} + u_{15} + \cdots + u_{25}$? On peut remarquer que cette somme s'écrit encore :

$$u_{1+13} + u_{2+13} + \cdots + u_{13+12}$$

Par conséquent elle comporte 12 termes, i.e $25 - 14 + 1$ termes.

Propriété 2.

La somme $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$ comporte donc $q - p + 1$ termes (p et q sont des nombres entiers tels que : $p < q$)

Propriété 3. (Somme des n premiers entiers)

$$1 + 2 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve

Notons $S = 1+2+\cdots+n-1+n$, on a $2S = 1+2+\cdots+n+1+2+\cdots+n = (1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\cdots+(n-2+3)+(n-1+2)+(n+1) = n(n+1)$ donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exemple :

La somme des 100 premiers entiers est donc :

$$\frac{100\times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Théorème 3.

On considère une suite arithmétique u et S la somme des termes successifs (à partir de celui de rang p jusqu'à celui de rang n) que l'on note :

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i$$

On a alors :

$$S = \frac{(n-p+1)(u_p+u_d)}{2}$$

Preuve

On a :

$$S = u_p + u_{p+1} + u_{p+2}\cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

En notant r la raison on obtient :

$$S = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + u_n$$

En inversant l'ordre des termes de cette somme, S s'écrit aussi :

$$S = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_p + 2r) + (u_p + r) + u_p$$

Effectuons alors la somme, membre à membre terme à terme, des deux égalités précédentes :

$$2S = (u_p + u_n) + (u_p + r + u_n - r) + (u_p + 2r + u_n - 2r) + \cdots + (u_n - 2r + u_p + 2r) + (u_n - r + u_p + r) + (u_n + u_p)$$

Cette somme comporte $n-p+1$ termes tous égaux à $u_p + u_n$, par conséquent :

$$2S = (n-p+1)(u_p+u_n) \Longleftrightarrow S = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

Exercice 5.

1. Calculer la somme des 50 premiers entiers impairs.
2. Calculer la somme des 50 premiers entiers pairs en partant de 12

Exercice 6. En reprenant le contexte de l'exercice introductif. La lapin blanc décide pour son second, le lapin rouge de donner dès sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans des carottes de la manière suivante :

- ⇝ 417 carottes la première semaine ;
- ⇝ Chaque semaine deux carottes de moins que la semaine précédente.

On note v la suite telle que v_n vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa $n-$ième semaine. Notons que $v_1 = 417$ et que v_0 n'existe pas.

1. Justifier que v_n est une suite arithmétique ; préciser sa raison et son sens de variation.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin bleu le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
   (a) Jusqu'à quel âge le lapin bleu peut-il se nourrir à satiété ?
   (b) Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin rouge au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$S = v_1 + v_2 + \cdots + v_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} v_i$$
   (c) Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin rouge (fort économe comme son frère) met toutes les autres de côté.
   Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin rouge.
   (d) Grand amateur de montre, le lapin rouge décide de troquer ses carottes contre des montres mais l'inflation existe au pays des merveilles. Il faut 10% de carottes supplémentaires pour obtenir une montre qu'au temps du lapin bleu. Le lapin rouge est-il perdant par rapport à son frère ?
4. Le lapin blanc constatant l'injustice subit par le lapin rouge décide d'utiliser une autre méthode pour les « carottes de poches » du lapin suivant, le lapin vert. Il le rémunère de sa naissance et jusqu'au jour de ses 4 ans de la manière suivante :
   - ⇝ 1 carotte la première semaine ;
   - ⇝ Chaque semaine trois carottes de plus que la semaine précédente ;
   - ⇝ 100 carottes les 6 derniers mois.

   On note w la suite telle que $w_0 = 1$ et w_n désigne le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour où il fête ses n semaines.
   (a) La suite w est-elle arithmétique ?
   (b) Plus précisément déterminer le rang jusqu'au quel w se comporte comme une suite arithmétique.
   (c) Identique à ses frères le lapin rouge économise dès qu'il reçoit plus de 300 carottes par semaine. Mais durant les 6 derniers mois il mange un peu de ses économies de manière à manger 300 carottes exactement par semaine. Sachant que le cours de la carotte a encore augmenté de 50% déterminer le nombre de montre que le lapin rouge possèdera au moment de devenir enfant.

II. Suite Géométrique

II.1. Découverte des suites géométriques au travers d'un exemple

Exercice 7. Vient le tour du derrnier né du lapin blanc, le lapin noir. Détestant les habitudes le lapin blanc modifie une nouvelle fois le système des « carottes de poches » et le lapin noir se voit proposer le système suivant :

- ⇝ 3 carottes la première semaine ;
- ⇝ Chaque semaine 3,5% de carottes en plus de la semaine précédente (le lapin blanc donnera s'il le faut des morceaux de carottes...)

On note t la suite telle que t_n vaut le nombre de carottes reçues par le lapin rouge le jour de sa $n-$ième semaine. Notons que $t_1 = 3$ et que t_0 n'existe pas.

1. Calculer t_1 ; t_2 et t_3 puis exprimer t_{n+1} en fonction de t_n. Combien de carottes le lapin noir a-t-il reçu le premier mois ?
2. Proposer une formule donnant t_n en fonction de n. Vérifier cette formule en recalculant t_1 ; t_2 et t_3.
3. Calculer le nombre de carottes reçues par le lapin noir le jour de ses 1 an, de ses 2 ans, de ses 3 ans et enfin le jour de ses 4 ans.
4. Pour leur seule consommation personnelle les lapins du pays des merveilles ont besoin de 300 carottes par semaine.
   (a) A partir de quel âge le lapin noir peut-il se nourrir à satiété ?
   (b) Déterminer le nombre total de carottes que le lapin blanc a donné au lapin noir au cours de son adolescence. On devra donc calculer :
   $$\text{S} = t_1 + t_2 + \cdots + t_{208} = \sum_{i=1}^{i=208} t_i$$
   (c) Dès qu'il reçoit plus de 300 carottes, le lapin noir (comme les autres) met toutes les autres de côté. Déterminer le nombre de carottes économiser par le lapin noir.
   (d) Par rapport au lapin précédent, le cours de la carotte a encore augmenté de 10%. Déterminer le nombre de montres que le lapin noir a pu acquérir grâce aux carottes économisées.

II.2. Définition

Définition 2.

Une suite géométrique est une suite de nombres dans laquelle chaque terme permet de déduire le suivant par multiplication par un coefficient constant appelé raison. Ainsi, une suite géométrique u de raison q et de premier terme a a la forme suivant :

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \quad aq^4$$

La définition peut s'écrire sous la forme d'une relation de récurrence, c'est-à-dire que pour chaque entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple :

La suite des puissances de 2 est une suite géométrique de raison 2 : $u_{n+1} = 2 \times u_n$
Donner les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,5.

Exercice 8.

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2}{3^n}$ est géométrique

2. La suite (v_n) est définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3v_n + 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On note
   $$w_n = v_n + 2$$
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique

Exercice 9. Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 \times (-1)^n$ est géométrique. On précisera sa raison.

II.3. Expression explicite en fonction de n

Théorème 4.

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ où a et q sont deux réels non nuls.
(u_n) est une suite géométrique de raison q

Preuve

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = qu_n$. Par conséquent la suite est géométrique de raison q

Théorème 5.

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme u_0 alors

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Preuve

On peut raisonner de proche en proche. On a :

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0 q \\
&u_2 = u_1 q = u_0 q^2 \\
&u_3 = u_2 q = u_0 q^3 \\
&\dots \\
&u_{n-1} = u_{n-2} q = u_0 q^{n-2} \\
&u_n = u_{n-1} q = u_0 q^{n-1}
\end{aligned}$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3. On a alors :

$$u_n = 2 \times 3^n$$

On peut, par exemple calculer directement $u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$

Théorème 6.

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors quels que soient les entiers naturels n et p on a :

$$u_n = q^{n-p} \times u_p$$

Preuve

D'après le théorème précédent, on a :

$$u_n = u_0 q^n \qquad \text{et} \qquad u_p = u_0 q^p$$

donc, puisque $q \neq 0$, $u_0 = \dfrac{u_p}{q^p}$; d'où $u_n = \dfrac{u_p}{q^p} q^n = u_p \times q^{n-p}$

Exercice 10. (u_n) et (v_n) sont deux suites géométriques. Déterminer u_5, u_8, v_7 et v_{15} sachant que :

1. $u_0 = 6$ et $q = -\dfrac{1}{3}$
2. $v_5 = 1$ et $v_{10} = 32$

II.4. Somme de termes successifs

On s'interesse à la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison q, avec $q \neq 1$

Propriété 4. (Cas particulier $u_n = q^n$, avec $q \neq 1$)

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Preuve

Notons $\mathrm{S} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}$, on a $q\mathrm{S} = q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n$
Par conséquent

$$(1-q)\mathrm{S} = \mathrm{S} - q\mathrm{S} = 1 - q^n \iff \mathrm{S} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Exemple :

La somme des 10 premiers termes de cette suite géométrique lorsque $q = 2$ est donc :

$$\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023$$

Théorème 7.

La somme des termes consécutifs, du terme de rang p au terme de rang n, d'une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$ est égale à :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Preuve

On calcule donc S, la somme des $n - p + 1$ termes consécutifs, de premier terme u_p, d'une suite géométrique de raison q où $q \neq 1$

$$\mathrm{S} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \cdots + u_p \times q^{n-p+1-1} = u_p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p+1-1}) = u_p \frac{1 - q^{n-p}}{1 - q}$$

Remarque : Le cas $q = 1$ est trivial, en notant le premier terme de la somme a :

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a + a + \cdots + a = na$$

Exercice 11. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{3}{2}$. Calculer $S = u_4 + u_5 + \cdots + u_{14}$

II.5. Convergence

Théorème 8.

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ alors :
- Si $q \in]-1;1[$ la suite (u_n) est convergente vers 0
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et donc convergente vers 1, si $q = -1$ la suite diverge (elle vaut tantôt 1 tantôt -1).
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est divergente (vers $+\infty$), enfin si $q < -1$ la suite diverge (un terme sur deux est négatif, l'autre est positif).

Pour cette démonstration, nous n'étudierons que le cas où $q > 0$, nous allons utiliser le résultat suivant [1]

Lemme 1. (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Preuve du lemme

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1 + nx$ est vraie
$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes
Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$
On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& (1+x)^n \geq 1 + nx \\
\iff & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) && \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\
\iff & (1+x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2 \\
\iff & (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \\
\iff & (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x && \text{puisque } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Remarque : Le type de raisonnement que l'on vient d'effectuer s'appelle le raisonnement par récurrence, il sera étudié amplement en terminale.

1. un résultat servant une démonstration est usuellement appelé Lemme

Preuve du théorème

⇝ $q > 1$

Posons $x = q - 1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$

⇝ $q \in [0;1[$

Si $q = 0$ le résultat est évident, sinon posons $q' = \dfrac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1;+\infty[$

D'après le résultat précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$$

Par passage à l'inverse nous obtenons donc :

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

La suite (u_n) converge donc vers 0

⇝ $q = 1$, le résultat est alors évident.

Exercice 12. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. On note s_n la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

1. Exprimer s_n en fonction de n
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} s_n$

II.6. Application

Exercice 13. Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bails.
1er contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 5€ par mois jusqu'à la fin du bail.
2ème contrat : Un loyer de 200€ pour le premier mois puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail [2].

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, i.e le loyer du 36ème mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (*Justifier par des calculs*)

Exercice 14. On considère la suite géométrique définie de la façon suivante :

$$u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n \qquad \forall n \geq 1$$

1. Calculer u_2 ; u_3 ; u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n ; en déduire u_{64}.
3. **La légende du jeu d'échec** : *Le roi demanda à l'inventeur du jeu d'échec de choisir lui-même sa récompense. Celui-ci répondit : « place 1 grain de blé sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, et ainsi de suite jusqu'à la* 64^{ième} *case. Le roi sourit de la modestie de la demande.*
   Calculer une valeur approchée du nombre total de grains de blé que le roi devra placer sur l'échiquier.

Exercice 15. Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux contiennent la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît après la mort du tissu de 1,24% en 100 ans.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, de 2000 ans et de 10000 ans.
2. Exprimer le pourcentage de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de $k \times 10^3$ années.
3. Un fossile ne contient plus que 10% de ce qu'il devrait contenir en carbone 14. Estimer son âge.

Exercice 16. Premières étapes de la construction du triangle de Sierpinski :

1. On note u la suite qui donne le nombre de triangle noir à l'étape n. Quelle est la nature de u ; préciser ses éléments caractéristiques.
2. On note v la suite qui donne la longueur d'un côté du triangle noir à l'étape n. Quelle est la nature de v ; préciser ses éléments caractéristiques.
3. On note w la suite qui donne l'aire d'un triangle noir à l'étape n. Quelle est la nature de w ; préciser ses éléments caractéristiques.
4. On note t la suite qui donne l'aire du domaine couvert par les triangles noirs à l'étape n. Quelle est la nature de t ; préciser ses éléments caractéristiques.

2. Un bail est un contrat de location

III. Suite Arithmético-géométrique

Exercice 17. Comme vous le savez tous, le Schblurb commun à aillette mouchetée est l'animal emblématique de la Syldavie. Aussi paisible que les habitants de ce bucolique pays, le Schblurb se nourrit exclusivement des baies du bleurtschzrn, arbre qui pousse en abondance dans les verts sous-bois syldaves.
On suppose que la population u lors de l'année n de Schblrurbs suit la loi suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

L'effectif des Schblurbs, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300000 Schblurbs, on prendra $u_0 = 0,3$.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite u pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et des paramètres a et b.
On cherche à estimer la population de Schblurbs dans l'avenir lointain, par deux techniques différentes dont l'une utilise la suite auxiliaire suivante :
la suite v est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

1. **Cas 1** : $u_0 = 0,7$; $a = -0,2$ et $b = 0,4$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   (b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.
   iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.
   iv. Déterminer cette limite par le calcul.
   (c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :
   $$v_n = u_n - \frac{1}{3}$$
   (d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
   (e) Exprimer v_n en fonction de n.
   (f) En déduire que
   $$u_n = \frac{11}{30} \times \left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$$
   (g) En déduire la limite ℓ de la suite u.
2. **Cas 2** : $u_0 = 0,7$; $a = 1,5$ et $b = -0,2$.
   (a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.
   (b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.
   iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.
   (c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :
   $$v_n = u_n - \frac{2}{5}$$
   (d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.
   (e) Exprimer v_n en fonction de n.
   (f) En déduire que
   $$u_n = \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$
   (g) En déduire la limite ℓ de la suite u.
3. **Cas 3** : $u_0 = 0,3$; $a = 1,5$ et $b = -0,2$.

(a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.

(b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.

iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.

(c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :

$$v_n = u_n - \frac{2}{5}$$

(d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.

(e) Exprimer v_n en fonction de n.

(f) En déduire que

$$u_n = -\frac{1}{10} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{2}{5}$$

(g) En déduire la limite ℓ de la suite u. Conclure.

4. **Cas 4** : $u_0 = 0,3$; $a = -0,5$ et $b = 7$.

(a) Calculer la population de Schblurbs présent aux années 1 ; 2 et 3.

(b) i. Préciser la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

ii. A l'aide de la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ représenter les 5 premiers termes de la suite u.

iii. Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de la suite u.

iv. Déterminer cette limite par le calcul.

(c) Vérifier que, pour tout entier n, on a :

$$v_n = u_n - \frac{14}{3}$$

(d) Montrer que v est une suite géométrique ; on précisera sa raison.

(e) Exprimer v_n en fonction de n.

(f) En déduire que

$$u_n = -\frac{131}{30} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{14}{3}$$

(g) En déduire la limite ℓ de la suite u. Conclure.

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien