Chapitre 10

Produit Scalaire

Hors Sujet

Titre : « Daft Punk »
Auteur : Homework
Présentation succinte de l'auteur : A force de s'entendre dire que Daft Punk était le duo techno que la terre entière nous enviait, on avait presque fini par oublier l'essentiel : la musique. A laquelle une réputation, fût-elle unanimement flatteuse, ne se substituera jamais. Il était donc temps que Daft Punk élargisse le cercle restreint d'un auditoire courtisan. Et à ce titre, la parution de leur premier album est particulièrement bienvenue : Homework transformant Daft Punk-la-rumeur en Daft Punk-le-groupe. Résultat : un disque technoïde gargantuesque qui affriande, affole les sens et s'apparente à un étourdissant collage musical à la croisée des chemins de la house de Chicago Revolution 909, du rock binaire les très glam Da Funk ou Rock'n Roll, de la musique electro Alive et du disco des 70's l'hymne prévisible au titre annonciateur qu'est Around The World. Soit une savante quintessence des influences multiples du groupe, comme en témoigne une photo intérieure du livret où se côtoient, pêle-mêle, poster de Kiss, pochette de Chic, autocollants de Led Zep, The Who ou Andy Gibb. De fait, Daft Punk pourrait, sur la seule foi d'Homework, rallier tous les suffrages et, partant, convertir des sensibilités différentes. Un petit pas pour la musique, mais un grand pas pour la techno.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- Maîtriser les trois définitions principales du produit sclaire ;
- Déterminer l'équation d'un cercle et d'une droite.

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

John Louis von Neumann

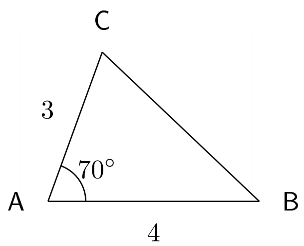
Leçon 10

Produit Scalaire

Introduction

Le produit scalaire est une nouvelle opération, qui a deux vecteurs associe un nombre réel. Etymologiquement, le mot « scalaire »provient du latin *scala* qui signifie échelle, historiquement le mot « scalaire »en mathématiques désigne un nombre réel. Si on veut comprendre le lien entre les deux, il faut remonter à l'empire romain. Dans les quartiers pauvres où s'élevaient de grands immeubles surpeuplés appelés *Insulae*, des échelles servaient parfois à passer d'un étage à l'autre. A l'époque, on désignait par « échelle 2 »ce qu'on appelerait aujourd'hui « étage 2 ». C'est ainsi que le mot échelle (scala) fut associé à l'idée de nombre.
Élément important de calcul en géométrie euclidienne, le produit scalaire apparaît cependant assez tard dans l'histoire des mathématiques. On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions. Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant. Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent seulement à l'aide du cosinus d'un angle et lui donnent le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite. Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre linéaire et, de propriété, deviendra définition.
La notation du produit scalaire à l'aide d'un point ou d'une croix provient de Josiah Willard Gibbs, dans les années 1880.
Le produit scalaire possède de multiples applications. En physique, il est, par exemple, utilisé pour modéliser le travail d'une force. En géométrie analytique il permet de déterminer le caractère perpendiculaire de deux droites ou d'une droite et d'un plan.
En particulier il permet de répondre au problème suivant (un prolongement du théorème de Pythagore) :

Exercice 1. ABC est un triangle tel que $AB = 4$; $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 70°$. Calculer BC.



I. Définition et conséquences immédiates

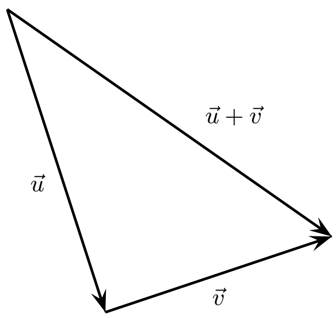
I.1. Vecteurs Orthogonaux

On rappelle que deux vecteurs sont orthogonaux si leurs directions sont orthogonales, indépendamment de leurs normes ou de leurs sens.

Théorème 1.

Dans un repère orthonormal, $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff xx' + yy' = 0$

Preuve



D'après le théorème de Pythagore on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rc}
 & \vec{u} \perp \vec{v} \\
\iff & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \\
\iff & (x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2+y^2+x'^2+y'^2 \\
\iff & x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2 = x^2+y^2+x'^2+y'^2 \\
\iff & 2xx'+2yy' = 0 \\
\iff & xx'+yy' = 0 \\
\iff & \vec{u}\cdot\vec{v} = 0
\end{array}$$

Exercice 2. Soient les points $A(1,-2)$, $B(2,3)$, $C(6,1)$ et $D(-4,3)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Remarque :

1. Si un vecteur est orthogonal à tout vecteur alors c'est le vecteur nul.
   En effet, on a en particulier $\vec{u} \perp \vec{u} \iff x^2+y^2=0 \iff x=0$ et $y=0$
2. Le théorème précédent pousse à définir une nouvelle opération entre les vecteurs, donnant une information concernant l'angle entre deux vecteurs.

I.2. Définition Analytique

Définition 1.

On considère un repère orthonormal, un vecteur $\vec{u}(x;y)$ et un vecteur $\vec{v}(x';y')$.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ définit par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$$

Exemple :

Si $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(6;-3)$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 6 + 3\times(-3) = 3$

Remarque :

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2+y^2 = \|\vec{u}\|^2$. On notera par convention : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
  De même si A et B sont deux points , on a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$
- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou si $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$. La réciproque est fausse, le fait que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ n'implique pas nécessairement que $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$. Les contres-exemples sont nombreux, en voici un : $\vec{u}(1;3)$ et $\vec{v}(-3;1)$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}=k\vec{v}$ et par conséquent :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xkx + yky = k(x^2+y^2) = k\|\vec{u}\|^2$$

I.3. Autres caractérisations du produit scalaire

Théorème 2. (Autres expressions du produit scalaire)

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
2. Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$
3. Lorsque $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ suivant la direction de $\vec{u}$

Preuve

1. Dans un repère orthonormal, notons $(x;y)$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $(x';y')$ les coordonnées de $\vec{v}$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2+(y+y')^2 = x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'^2+y'^2 \\ \iff & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = x^2+y^2+x'^2+y'^2+2(xx'+yy') \\ \iff & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

2.3. Supposons maintenant que $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. Commençons par construire un repère orthonormal :
Posons $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, et $\vec{j}$ le vecteur tel que : $(\vec{i};\vec{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $\|\vec{j}\| = 1$
Ainsi la base $(\vec{i};\vec{j})$ est orthonormée directe. Dans cette base, en notant $\theta = (\vec{u};\vec{v})$ on a :

$$\vec{u}\left(\|\vec{u}\|,0\right) \quad , \quad \vec{v}\left(\|\vec{v}\|\cos\theta;\|\vec{v}\|\sin\theta\right) \quad , \quad \vec{v'}\left(\|\vec{v}\|\cos\theta;0\right)$$

D'où :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v}) \text{ et } \vec{u}\cdot\vec{v'} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires on a :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même sens.
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont sens contraire.

Exercice 3. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ on donne $A(1,1)$, $B(4,1)$ et $C(3,3)$. Calculer de quatre manière différentes $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4. ABC est un triangle tel que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$, $AB = 6$ et $AC = 2\sqrt{3}$.
Calculer la mesure exacte en radians de l'angle $\widehat{BAC}$

II. Propriétés du produit scalaire

Propriété 1.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ on a :

1. <u>Symétrie</u> : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. <u>Bilinéarité</u>(linéarité par rapport aux deux variables :
   $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la première variable)
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)
3. $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}+\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \iff \vec{u}=\vec{0}$

Preuve

Dans un repère orthonormal, notons $\vec{u}(x;y)$, $\vec{v}(x';y')$ et $\vec{w}(x'';y'')$

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+xx''+yy'+yy''=xx'+yy'+xx''+yy''=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
   $$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(x+x')x''+(y+y')y''=xx''+x'x''+yy''+y'y''=xx''+yy''+x'x''+y'y''=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
3. $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=x\lambda x'+y\lambda y'=\lambda xx'+\lambda yy'=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(xx'+yy')=\lambda(\vec{u}+\vec{v})$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \iff x^2+y^2=0 \iff x=0$ et $y=0 \iff \vec{u}=\vec{0}$

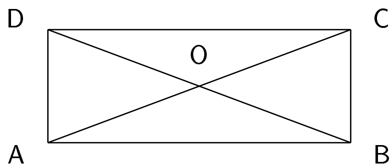
Exemple :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

<u>Exercice</u> 5. $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB=4$ et $BC=3$.
Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

<u>Solution :</u>

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\\
= & \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{DB}\\
= & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}\\
= & AB^2-BC^2\\
= & 16-9=7
\end{aligned}$$



Application :

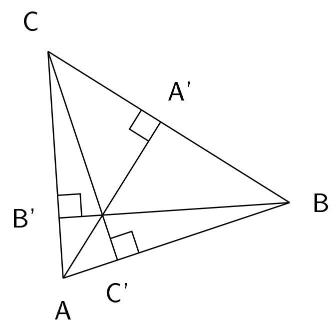
Retrouver, à l'aide du produit scalaire, le fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

<u>Solution :</u>Notons A', B' et C' les projetés orthogonaux de A, B et C respectivement sur (BC), (AC) et (AB) et $H=(BB')\cap(CC')$. On veut montrer que $H\in(AA')$.

On remarque que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Par conséquent

$$\begin{array}{ll} & \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} \\ \Longleftrightarrow & (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB} \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} \quad \text{car } \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{0} \end{array}$$



Les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires, ce qui prouve que la droite (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC. CQFD

Remarque : Règle pratique : pour calculer un produit scalaire, on peut décomposer un vecteur (ou les deux) suivants des directions orthogonales.

III. Identités remarquables

Théorème 3.

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Preuve

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

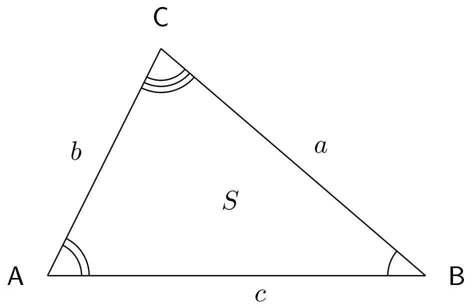
Application :

1. Identité du parallélogramme : $(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)$
   Si $ABCD$ est un parallélogramme, en notant $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$ on obtient une relation entre les diagonales et les côtés du parallélogramme : $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$
2. Inégalité triangulaire : Comme $\vec{u}\cdot\vec{v}\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ (puisque $\cos\theta\leq 1$), on a :

$$\begin{array}{ll} & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\leq\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \\ \Longleftrightarrow & \|\vec{u}+\vec{v}\|^2\leq(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2 \\ \Longleftrightarrow & \|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\| \end{array}$$

IV. Applications du produit scalaire

Soit ABC un triangle quelconque, on note $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, S l'aire du triangle, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$:



IV.1. Théorème d'Al Kashi et relations dans un triangle

IV.1.a. Al Kashi

Théorème 4. (d'Al Kashi, dit « Pythagore généralisé »)

Avec les notations précédentes : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Preuve

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, il vient $BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
d'où $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Exercice 6. ABC est un triangle tel que $AB = 4$; $AC = 3$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 70°$. Calculer BC.

IV.1.b. Relations dans un triangle

Propriété 2.

Avec les notations précédentes, $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

Preuve

Soit H le pied de la hauteur issue de C. On sait que :

$$S = \frac{1}{2}AB \times CH$$

Lorsque $\widehat{A}$ est aigu, $CH = CA\sin\widehat{A}$ et sinon $CH = \sin(\pi - \widehat{A} = CA\sin\widehat{A}$. Par conséquent, dans tous les cas : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

Corollaire 1.

Avec les notations précédentes, $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$

Preuve

D'après le théorème précédent, $2S = bc\sin\widehat{A} = ca\sin\widehat{B} = ab\sin\widehat{C}$
En multipliant $2S$ par $\dfrac{1}{abc}$, on obtient

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$

Comme les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro, on obtient : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$

Exercice 7. ABC est un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{B} = 75°$ et $\widehat{C} = 45°$
Calculer AB et AC

IV.2. Droites et produit scalaire

IV.2.a. Equation générale d'une droite

Théorème 5.

Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels, dans ce cas $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur.
Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0, 0)$ est une droite dirigée par $\vec{u}(-b; a)$.

Preuve

$\Longrightarrow$) Considérons 2 points $A(x_a; y_a)$ et $B(x_b; y_b)$, alors :

$$M(x; y) \in (AB) \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow (x - x_a) \times k(y_b - y_a) - (y - y_a) \times k(x_b - x_a) = 0$$

On obtient le résultat en posant $a = k(y_b - y_a)$, $b = k(x_b - x_a)$ et $c = -x_a \times k(y_b - y_a) + y_a \times k(x_b - x_a)$

$\Longleftarrow$) Si $b \neq 0$, alors $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ ce qui est l'équation d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Si $b = O$, alors $a \neq 0$ et $x = \dfrac{-c}{a}$, ce qui est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

IV.2.b. Vecteur normal et équation de droite

Définition 2.

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est <u>normal</u> à une droite d si et seulement si sa direction est orthogonale à celle de d

Théorème 6.

Soit d une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal à d et $A \in d$.
d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Preuve
Notons $\vec{n}(a;b)$ dans un repère orthonormal alors

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff a(x - x_a) + b(y - y_a) = 0 \iff ax + by - ax_a - b_a = 0$$

Remarque : Dans un repère orthonormal, si d est une droite qui a pour équation $ax + by + c = 0$, alors $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal, et réciproquement

IV.2.c. Droites perpendiculaires

Théorème 7.

Dans un repère orthonormal, les droites d et d' ont pour équations respectives $ax+by+c = 0$ et $a'x+b'y+c' = 0$
d et d' sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$

Preuve
Considérons les deux vecteurs $\vec{n}(a;b)$ et $\vec{n}'(a';b')$ normaux à d et d'
$d \perp d' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' \iff aa' + bb' = 0$

<u>**Exercice**</u> **8.** Dans un repère orthonormal, la droite d a pour équation $x - y + 2 = 0$. Trouver une équation de la droite Δ perpendiculaire à d passant par le point $B(2;1)$

<u>**Exercice**</u> **9.** Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(0;3)$ et $B(4;-1)$. Trouver une équation de la médiatrice de $[AB]$.

IV.3. Cercles et produit scalaire

IV.3.a. Caractérisation vectorielle d'un cercle de diamètre $[AB]$

Théorème 8.

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Preuve

Notons $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. $\mathscr{C}$ privé des points A et B est l'ensemble des points M du plan tels que AMB soit un triangle rectangle en M, donc l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux i.e $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

IV.3.b. Equation d'un cercle

Théorème 9.

Dans un repère orthonormal, on considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.
Le cercle $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ où $(x_0;y_0)$ sont les coordonnées du centre du cercle $\mathscr{C}$ et r son rayon.

Preuve

$M(x;y) \in \mathscr{C} \iff OM = r \iff OM^2 = r^2 \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$

Exemple :

$(x+3)^2+(y-1)^2 = 5$ est une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $O(-3;1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 10. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ trouver une équation :

1. du cercle $\mathscr{C}$ de centre $I(1;2)$ passant par $J(3;-2)$
2. du cercle $\mathscr{C}'$ passant par les points O, $A(4;0)$ et $B(0;2)$.

Exercice 11. Dans un repère orthonormal, on donne les équations suivantes :

1. $x^2+y^2-2x+y+1=0$
2. $x^2+y^2-2x+4y+5=0$
3. $2x^2+2y^2-4x-6y+7=0$

Pour chacune des équations précédentes, dites si c'est l'équation d'un cercle. Si oui, préciser son centre et son rayon.

IV.4. Trigonométrie

Propriété 3.

Quels que soient les réels a et b :

1. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Preuve

1. Choisissons un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O, muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. A et B sont les points de $\mathscr{C}$ tels que, en radians, $(\vec{i},\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OB}) = b$. Dans ce cas $A(\cos a;\sin a)$ et $B(\cos b;\sin b)$
   De plus
   $$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OA},\vec{i}) + (\vec{i};\overrightarrow{OB}) = b-a$$
   Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ de deux manières différentes :
   $$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \cos a\cos b + \sin a\sin b = OA\times OB\times\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \cos(b-a)$$
2. On sait que $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
   En écrivant $a+b = a-(-b)$, on obtient :
   $$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a\cos(-b) + \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
3. $\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
4. $\sin(a+b) = \sin(a-(-b)) = \sin a\cos(-b) - \cos a\sin(-b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

Corollaire 2 : Formules de duplication

Quel que soit le réel a on a :

1. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
2. $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Preuve

En utilisant le théorème précédent, il vient :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \qquad \text{et} \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient aussi :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \qquad \text{et} \qquad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

D'où

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exercice 12.

1. Simplifier l'écriture de $F(x) = \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x$
2. Démontrer que :
   (a) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin x - \cos x$
   (b) Pour tout réel a, $1+\cos a+\sin a = 2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}\right)$

Exercice 13.

1. En remarquant que $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, calculer $\sin\frac{11\pi}{12}$
2. En remarquant que $2\times\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

IV.5. Formules de la médiane et lignes de niveau

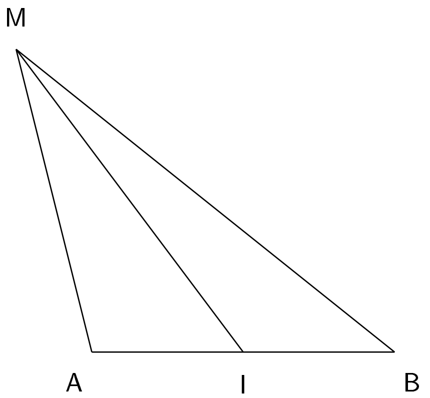
IV.5.a. Formules de la médiane

Propriété 4.

Soit A et B deux points quelconque du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$
2. $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$
3. $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Illustration :



Preuve

1. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

   Or $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \times IB = -\dfrac{AB}{4}$ et $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{0}$, par conséquent :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

2. $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2}AB^2$
3. $MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = MI^2 + IA^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - MI^2 - IB^2 - 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

IV.5.b. Lignes de niveau

Définition 3.

Soit f une application qui a tout point M du plan associe un réel $f(M)$.
On appelle ligne de niveau k de l'application f l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = k$

Exercice 14. $f : M \longmapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$
Soit k un réel. Déterminer la ligne de niveau k de f

Solution : Il faut donc chercher l'ensemble E_k des points du plan tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$
Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
Soit H le point de $\mathscr{D}$ tel que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = k$. Par conséquent :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \left(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AM}\right) = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{MH} = 0$$

Conclusion : E_k est donc la droite passant par H admettant $\vec{u}$ comme vecteur normal, i.e la droite passant par H et perpendiculaire à $\mathscr{D}$

Exercice 15. $f : M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$
Soit k un réel. Déterminer la ligne de niveau k de f

Solution : Il faut donc chercher l'ensemble E_k des points du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

D'après les formules de la médianes on sait que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Longleftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Longleftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

On distingue trois cas :

1. $k + \dfrac{AB^2}{4} > 0$, alors E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \dfrac{AB^2}{4}}$
2. $k + \dfrac{AB^2}{4} < 0$, alors $E_k = \emptyset$
3. $k + \dfrac{AB^2}{4} = 0$, alors $E_k = \{I\}$

Exercice 16. $f : M \longmapsto \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$
Soit k un réel. Déterminer la ligne de niveau k de f

Solution : Il faut donc chercher l'ensemble E_k des points du plan tel que $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k$

D'après les formules de la médianes on sait que

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \Longleftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Longleftrightarrow MI^2 = \frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

On distingue trois cas :

1. $\dfrac{k}{2} - \dfrac{AB^2}{4} > 0$, alors E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{k}{2} - \dfrac{AB^2}{4}}$
2. $\dfrac{k}{2} - \dfrac{AB^2}{4} < 0$, alors $E_k = \emptyset$
3. $\dfrac{k}{2} - \dfrac{AB^2}{4} = 0$, alors $E_k = \{I\}$

Exercice 17. $f : M \longmapsto \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$
Soit k un réel. Déterminer la ligne de niveau k de f

Solution : Il faut donc chercher l'ensemble E_k des points du plan tel que $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k$
D'après les formules de la médianes on sait que

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{k}{2}$$

La suite se traite comme dans le premier cas.

Exercice 18. $f : M \longmapsto \dfrac{MA}{MB}$
Soit k un réel strictement positif et différenté de 1. Déterminer la ligne de niveau k de f

Solution : Il faut donc chercher l'ensemble E_k des points du plan tel que $\dfrac{MA}{MB} = k \Longleftrightarrow MA = kMB$
On a :

$$\begin{array}{rc} & MA = kMB \\ \Longleftrightarrow & MA^2 = k^2MB^2 \\ \Longleftrightarrow & \overrightarrow{MA}^2 = k^2\overrightarrow{MB}^2 \\ \Longleftrightarrow & \left(\overrightarrow{MA}^2 - k\overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA}^2 + k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \end{array}$$

Soit G_1 et G_2 les barycentres de $\{(A;1),(B;-k)\}$ et $\{(A;1),(B;k)\}$ (ces barycentres existent puisqu'on a supposé $k \neq 1$ et $k \neq -1$)
On rappelle que $(1-k)\overrightarrow{MG_1} = \overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}$ et $(1+k)\overrightarrow{MG_2} = \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$
On obtient alors :

$$(1-k)\overrightarrow{MG_1} \cdot (1+k)\overrightarrow{MG_2} = 0$$

Comme $(1-k)(1+k) \neq 0$ on a : $\overrightarrow{MG_1} \cdot \overrightarrow{MG_2} = 0$
Par conséquent E_k est le centre de diamètre $[G_1G_2]$

Application :

Soit $[AB]$ un segment de 4 cm.

1. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 24$
2. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8$
3. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 40$
4. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 10$
5. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 - MB^2 = 24$
6. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$
7. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4$
8. Rechercher l'ensemble des points M du plan tel que $MA = 2MB$

« C'est marrant, suffit de s'arranger pour que quelqu'un pige rien à ce qu'on lui dit et on obtient pratiquement tout ce qu'on veut. »

J.D Salinger, écrivain, extrait de l'attrape-coeurs