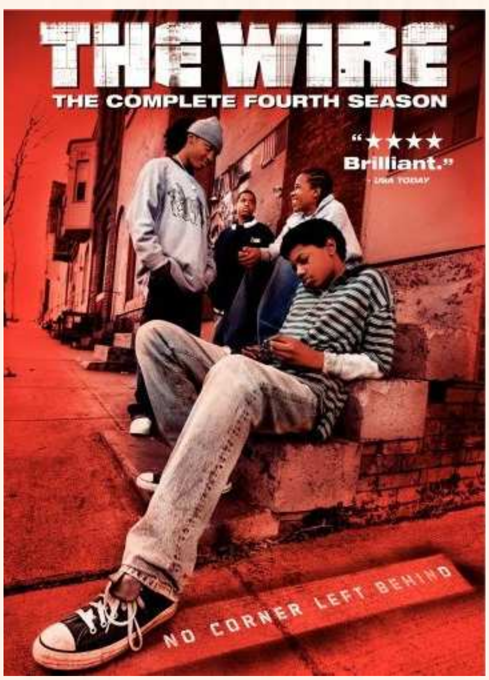
Chapitre 1

fonctions de référence et variations

Hors Sujet



Titre : « The Wire »
Auteur : David Simon
Présentation succinte de l'auteur : Sur écoute (The Wire) est une série télévisée américaine, créée par David Simon et Ed Burns.

Elle a pour sujet la criminalité dans la ville de Baltimore, à travers la vision de ceux qui la vivent au quotidien : policiers, trafiquants en tous genres, politiques, enseignants, journalistes, résidents de Baltimore, etc.

Avec un aspect de quasi-documentaire par son réalisme et son non-manichéisme, la série est acclamée par la critique, bien qu'elle n'ait pas connu un succès commercial important. Elle est souvent considérée comme la meilleure série télévisée jamais diffusée à la télévision, et l'une des fictions les plus abouties dans les années 2000, notamment pour sa représentation réaliste quasi littéraire de la vie urbaine, et son exploration profonde des thèmes socio-politiques de l'Amérique.

Le tour de force de la série est de s'engager, sur le plan social, en montrant sans détour les pans les plus sombres du décor américain, son revers le plus inavouable, tout en mettant en scène une multitude de points de vue réalistes qui multiplient les questions dérangeantes sans jamais proposer de solution miracle. Il n'y a pas de fausse objectivité rassurante et pas de subjectivité accusatrice sous-jacente, l'épisode ne fait que montrer le plus passivement possible, il en résulte un étrange bourdonnement qui persiste longtemps après sa diffusion.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Connaître les représentations graphiques et les tableaux de variations des fonctions affines, polynôme de degré 2, inverse, racine carrée et valeur absolue.
- ⇝ La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) sur I est croissante (resp. décroissante) sur I.
- ⇝ u et $\dfrac{1}{u}$, sens de variation contraire.
- ⇝ u et $\sqrt{u}$ même sens de variation.

« Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

Leçon 1

fonctions de référence et variations

Au fil du temps

Nous allons découvrir de nouvelles fonctions de référence : la fonction racine carré et la fonction valeur absolue. Vous connaissez déjà la fonction carré, la fonction inverse et les fonctions affines.
Au XVI^e siècle, le mathématicien allemand Christoff Rudolff est à l'origine de la notation $\sqrt{}$ dans un traité d'arithmétique. Il s'agit probablement d'un r minuscule déformé. En effet, r est la première lettre du mot « racine » en latin (« radix »). La notation se généralise en XVII^e, grâce notamment au mathématicien français René Descartes.
Karl Weirerstrass (1815-1987), mathématicien allemand considéré généralement comme l'un des plus grands mathématiciens du XIX^e, est à l'origine de la notaion $|x|$ pour la valeur absolue de x. Dans le premier chapitre, nous avons utilisé la fonction carré pour étudier plus généralement les fonctions polynômes de degré 2.
De même ici, nous nous appuieront sur les fonctions de référence pour généraliser des résultats sur d'autres fonctions.

I. Fonctions de références

I.1. Préliminaire : Les variations

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1.

On dit que f est strictement croissante sur I si pour tous réels x et y de I rangés dans un certain ordre, leurs images $f(x)$ et $f(y)$ sont rangées dans le même ordre :

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad \text{on a } x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

Autrement dit, une fonction croissante conserve l'ordre sur l'intervalle I.
On dit que f est strictement décroissante sur I si et seulement si

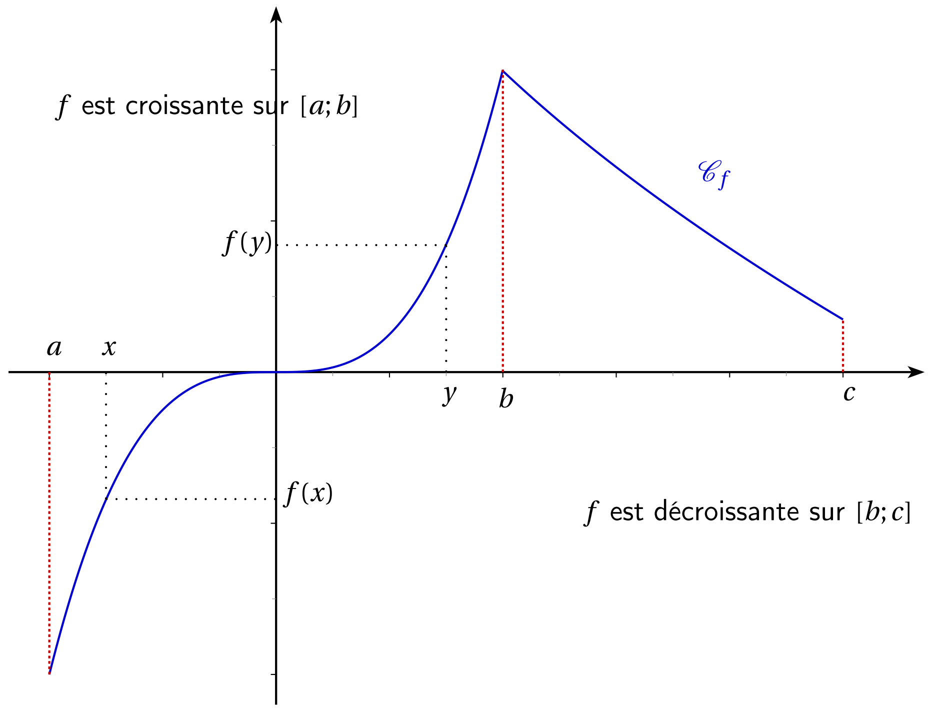
$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad \text{on a } x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

Autrement dit, une fonction décroissante inverse l'ordre sur l'intervalle I.

Remarques :

- On parle de fonction **monotone** sur un intervalle I si celle-ci y est soit croissante, soit décroissante.
- On parle de sens de variation que sur un intervalle, les bornes ouvertes ou fermées ne jouant aucun rôle.
- On dit que f est constante sur I si, et seulement si : $\forall x, y \in \mathrm{I}$, on a $x < y \Longrightarrow f(x) = f(y)$
- La représentation graphique d'une fonction constante égale à k est une droite parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $y = k$.
- On résume les variations d'une fonction dans un tableau.

Illustration graphique :



Méthodes pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I

On pose x et y deux nombres quelconques de l'intervalle I tel que $x < y$.
Ensuite on peut procéder de deux manières.

- Soit par inégalités successives, on compare $f(x)$ et $f(y)$
- Soit on calcule $f(x) - f(y)$ et on regarde son signe pour conclure.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On se propose de démontrer que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1. (a) On considère deux nombres réels x et y, démontrer que :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

   (b) Déterminer le signe de $x^2 + xy + y^2$ lorsque :

   i. x et y sont de même signe.
   ii. x et y sont de signe contraire.[1]

2. Conclure.

1. On pourra démontrer que $(x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) < 0)$

I.2. Fonction polynôme et homographique

I.2.a. Polynôme de degré 1 : Les fonctions affines

Dans toutes cette partie, a et b désignent deux réels fixés.

Définition 2.

Les **fonctions affines** sont les fonctions f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

Remarques :

⇝ b est l'ordonnée à l'origine, dans le cas où $b = 0$, l'expression de f est linéaire.

⇝ a est le coefficient directeur (il indique la pente de la droite représentant f), dans le cas où $a = 0$ alors la fonction f est constante.

Exemple :

Trouver la fonction affine telle que $f(1) = 3$ et $f(-2) = -1$.
f est une fonction affine ce qui équivaut à dire que $\exists a, b \in$ R, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax + b$. En particulier, on a :

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-2) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a \times 1 + b = 5 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5 - a \\ -2a + (5 - a) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 5 - a \\ -3a = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

La fonction affine f vérifiant $f(1) = 5$ et $f(-2) = -1$ est $f : x \mapsto 2x + 3$.

Propriété 1.

⇝ L'ensemble de définition d'une fonction affine est $\mathbb{R}$.

⇝ La représentation graphique d'une fonction affine est une droite. Son équation réduite est $y = ax + b$.
a est appelé le **coefficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**

⇝ On a les tableaux suivants :

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Variations		↘	0	↘	
Signe		+	0	−	

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Variations		↗	0	↗	
Signe		−	0	+	

Preuve

Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On cherche à savoir si $f(x) = ax + b$ et $f(y) = ay + b$ sont dans le même ordre. On a :

$$f(y) - f(x) = ay + b - (ax + b) = a(y - x)$$

On $x < y$ donc $y - x > 0$.
Si $a > 0$ on a alors $f(y) - f(x) > 0$ et la fonction est strictement croissante.
Sinon, on a $f(y) - f(x) < 0$ et la fonction est strictement décroissante.

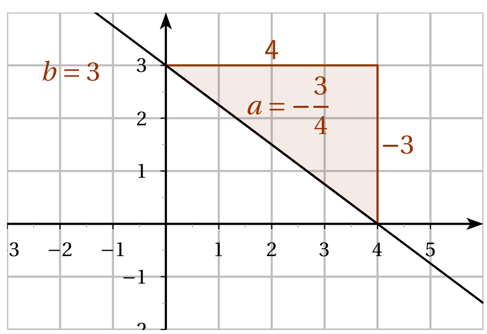
Exemple :

1. Trouver la fonction affine telle que $f(4) = 0$ et $f(3) = 0$.
2. Etablir son tableau de variation, de signe et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
3. Où peut-on lire sur le graphique l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue ?
4. Même question pour son coefficient directeur.

f est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{3}{4}x + 3$. Alors : $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{-\frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$ et $a > 0$ d'où :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Variations	$\searrow$	0	$\searrow$
Signe	+	0	−

On a la représentation graphique suivante :



Interprétation graphique de a et b

Proposition 1.

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points tels que $x_A \neq x_B$.
La droite (AB) admet pour coefficient directeur :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Exercice 2.

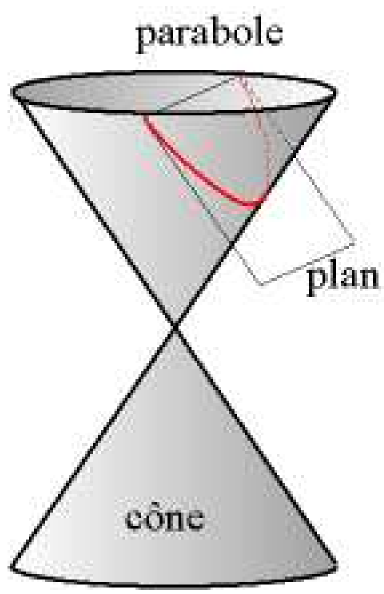
1. Trouver le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine de la droite passant par $A(2;-1)$ et $B(3;5)$. En déduire l'expression de la fonction affine représentée par cette droite.
2. Même question pour les points $C(-1,2)$ et $D(3;-1)$.
3. Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites (AB) et (CD).

I.2.b. Fonctions polynôme de degré 2

I.2.b.i. Définition et premières propriétés

Remarque : **Culture**

Depuis l'antiquité on étudie les paraboles, il se trouve qu'elles sont les représentations graphiques des fonctions polynôme du second degré. Cependant les mathématiciens ne les connaissait pas comme cela dans le passé mais comme des formes géométriques obtenues par la section d'un cône avec un plan comme dans le schéma ci-dessous :



Raison pour laquelle les paraboles font partie de la famille des coniques.

Définition 3.

Les fonctions polynôme de degré 2 sont les fonctions f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2+b+c$ avec $a \neq 0$. Leur représentation graphique est appelée parabole et a pour équation cartésienne

$$y = ax^2 + bx + c$$

Remarque : $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la forme développée de la fonction polynôme f. Elle est pratique pour :
⇝ déterminer l'image de 0 : $f(0) = c$.

⇝ déterminer les antécédents éventuels de c :

$$f(x) = c \Longleftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Longleftrightarrow x(ax+b) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{a}$$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2)$.

1. Démontrer que f est une fonction polynôme de degré 2.
2. Calculer l'image de 0 par f.
3. Déterminer les antécédents éventuels de -2 par f.
4. Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f.

Théorème 1.

Toute fonction polynôme de degré 2 f avec $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme (dite canonique) $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Avant de démontrer ce résultat, nous avons besoin du suivant :

Lemme 1.

Deux polynômes P et Q définies par $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathrm{Q}(x) = a'x^2 + b'x + c'$ sont égaux si et seulement si :

$$a' = a \qquad b' = b \qquad c' = c$$

Preuve

⇝ Montrons que $\mathrm{P} = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0$.
$\mathrm{P} = 0$ signifie que $\mathrm{P}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, en particulier pour $x = 0$ on a $\mathrm{P}(0) = c = 0$, ainsi $c = 0$. De plus $\mathrm{P}(1) = a + b = 0$ et $\mathrm{P}(-1) = a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b$ et donc $2a = 0 \Longleftrightarrow a = 0 = b$. Réciproquement le résultat est évident.

⇝ $\mathrm{P}(x) = \mathrm{Q}(x) \Longleftrightarrow ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c' \Longleftrightarrow (a-a')x^2 + (b-b')x + c - c'$, et en utilisant la première partie de la démonstration on obtient le résultat voulu.

Preuve

théorème

$$a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$$

On obtient $ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta = ax^2 + bx + c$ dès lors que (lemme) $-2a\alpha = b \Longleftrightarrow \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $a\alpha^2 + \beta = c \Longleftrightarrow \beta = c - a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 = c - a \times \dfrac{b^2}{4a^2} = c - \dfrac{b^2}{4a} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Remarque : Le premier intérêt de la forme canonique est de déduire un extremum de la fonction f.
En effet, si $a > 0$ alors :

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \geq \beta$$

De pus $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$. Ce qui prouve que β est le minimum de f atteint pour $x = \alpha$.
Si $a < 0$ alors

$$(x-\alpha)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 \leq 0 \Longleftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \leq \beta$$

De pus $f(\alpha) = a(\alpha-\alpha)^2 + \beta = \beta$. Ce qui prouve que β est le maximum de f atteint pour $x = \alpha$.

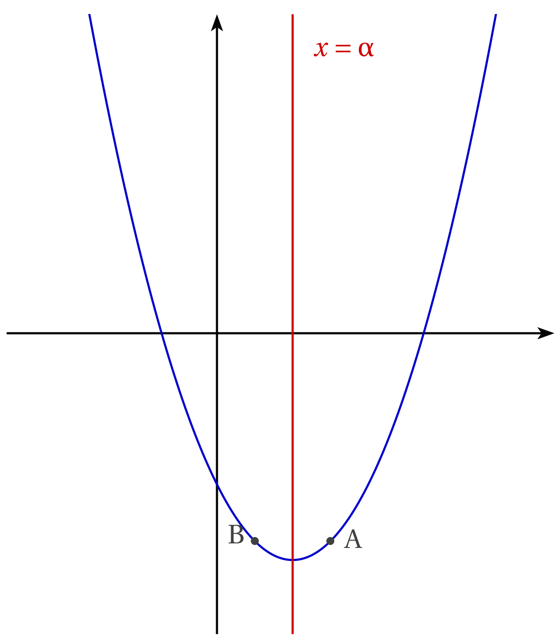
I.2.b.ii. Conséquence de la forme canonique

Théorème 2.

Soit f une fonction polynôme de degré 2 et $f(x) = \alpha\left(x-\beta\right)^2 + \gamma$ sa forme canonique. La représentation graphique de f admet la droite verticale d'équation $x = \beta$ comme axe de symétrie.

Preuve

Montrons que toute parabole d'équation $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ admet un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.



Soit ϵ un réel, alors si $\mathrm{A}(\alpha+\epsilon; f(\alpha+\epsilon))$est sur la parabole il faut montrer que $\mathrm{B}(\alpha-\epsilon; f(\alpha-\epsilon))$ est aussi sur la parabole i.e que :

$$f(\alpha+\epsilon)) = f(\alpha-\epsilon))$$

Or $f(\alpha+\epsilon)) = a(\alpha+\epsilon-\alpha)^2 + \beta = a\epsilon^2 + \beta$ et $f(\alpha-\epsilon) = a(\alpha-\epsilon-\alpha)^2 + \beta = a(-\epsilon)^2 + \beta = a\epsilon^2 + \beta$.

On étudie les variations de la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

⇝ *Cas 1* : $a > 0$
Montrons que f est strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Considérons deux antécédents x et y de $[\alpha;+\infty[$ avec $\alpha \leq x < y$ et montrons que $f(x) < f(y)$.
Pour cela étudions le signe de $f(x)-f(y)$.

$$f(x)-f(y) = a(x-\alpha)^2+\beta-\left(a(y-\alpha)^2+\beta\right) = a(x-\alpha)^2+\beta-a(y-\alpha)^2-\beta$$

$$f(x)-f(y) = a(x-\alpha)^2-a(y-\alpha)^2 = a\left((x-\alpha)^2-(y-\alpha)^2\right) = a(x-\alpha+y-\alpha)(x-\alpha-y+\alpha) = a(x-\alpha+y-\alpha)(x-y)$$

Comme $x<y$ alors $x-y<0$. Comme $x \geq \alpha \iff x-\alpha \geq 0$ et enfin comme $y \geq \alpha \iff y-\alpha \geq 0$. Ainsi $x-\alpha+y-\alpha \geq 0$ et donc $(x-\alpha+y-\alpha)(x-y)<0 \Longrightarrow a(x-\alpha+y-\alpha)(x-y)<0 \Longrightarrow f(x)-f(y)<0 \Longrightarrow f(x)<f(y)$.
On vient de montrer que images et antécédents sont rangés dans le même ordre sur $[\alpha;+\infty[$.
Par conséquent f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty;\beta]$.
On le déduit immédiatement de la symétrie de la parabole représentant la fonction f.
Par conséquent f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$.

⇝ *Cas 2* : $a<0$
La démonstration est identique, cependant comme $a<0$, on obtient des résultats opposés i.e f **est strictement décroissante sur** $[\alpha;+\infty[$. et f **est strictement croissante sur** $]-\infty;\alpha]$.

Propriété 2.

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, alors : lorsque $a>0$ on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	β	↗	

Et lorsque $a<0$ on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	

<u>Exercice</u> 4. Dans chacun des cas suivants, construire le tableau variation de f, puis tracer la courbe réprésentative de f.

1. $f(x)=-3(x-1)^2+2$
2. $f(x)=4(x+2)^2-5$
3. $f(x)=-2x^2+1$
4. $f(x)=7\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$
5. $f(x)=9(x+\pi)^2-1$
6. $f(x)=-(x+1-\sqrt{2})^2+1$.

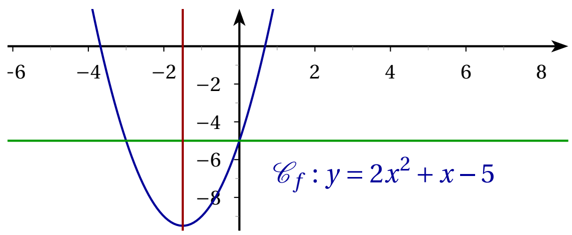
I.2.b.iii. Retrouver la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple :

On donne $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$. Retrouvons la forme canonique de f.
Déterminons les antécédents éventuels de -5 :

$$2x^2 + 6x - 5 = -5 \Longleftrightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Longleftrightarrow x(2x+6) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{2} = -3$$

Ainsi on a $f(-3) = -5 = f(0)$. Graphiquement on a une situation du type :



Clairement $\beta = \dfrac{-3+0}{2} = -1,5$, $\alpha = 2$ et γ est le minimum de f atteint lorsque $x = -1,5$.
Calculons $f(-1,5) = 2 \times (-1,5)^2 - 6 \times 1,5 - 5 = \dfrac{9}{4} - 9 - 5 = \dfrac{9}{4} - 14 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{56}{4} = -\dfrac{47}{4}$.
En conclusion on obtient :

$$f(x) = 2(x+1,5)^2 - \frac{47}{4}$$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, retrouver la forme canonique de la fonction f.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 2$
2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
3. $f(x) = 3x^2 - 12x - 1$
4. $f(x) = -3x^2 + 12 + 1$

I.2.c. La fonction inverse

Définition 4.

La fonction inverse est la fonction f définie pour $x \neq 0$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété 3.

- L'ensemble de définition de la fonction inverse est : $\mathscr{D}\,]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
- Sa courbe représentative est une hyperbole.
- On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	$\searrow$	||	$\searrow$
Signe	$-$	||	$+$

Preuve

Soient x et y deux nombres négatifs tels que $x<y$.

Alors $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{y-x}{xy}$.

Or $x<y \iff y-x>0$ et x et y négatifs donc $xy>0$.

On en déduit que $\frac{y-x}{xy}>0$ ce qui permet de conclure que $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ sur les négatifs.

Donc la fonction inverse inverse l'ordre sur les négatifs, elle est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

On procède de même sur les positifs.

Exercice 6. Etudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions :[2]

1. $f_1(x)=-\frac{1}{4}x^2$
2. $f_2(x)=\frac{2}{x}$
3. $f_3(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{4}x^2$

2. On remarquera que $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

II. Deux nouvelles fonctions de référence

II.1. La fonction « racine carré »

Travail de l'élève : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

1. Etude des variations
   (a) Construire la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.
   Conjecturer le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.
   (b) Démontrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 \leq a < b$, on a :
   $$f(b)-f(a)=\frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$
   En déduire le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$.
   Dresser son tableau de variations.
2. Etude de la courbe représentative
   (a) Démontrer que, pour tous réels x et y, les points $\mathrm{M}(x;y)$ et $\mathrm{M}'(y;x)$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.
   (b) Dans un même repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, construire la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f, et la courbe $\mathscr{P}$, représentative de la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x^2$
   (c) Démontrer que $\mathrm{M}(x;y)\in\mathscr{C}$ équivaut à $\mathrm{M}'(y;x)\in\mathscr{P}$
   (d) Que peut-on en déduire pour les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$?

Définition 5.

On appelle fonction racine carrée la fonction qui a tout nombre $x \geq 0$ associe le nombre $f(x)$ définie par :
$$f(x)=\sqrt{x}$$

Propriété 4.

- L'ensemble de définition de la fonction racine carré $\mathbb{R}^+$.
- La courbe preséntative de la fonction racine carré et la courbe représentative de la fonction carré sur $[0;+\infty[$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.
- On a le tableau suivant

x	0	$+\infty$
Variations	0	$\nearrow$
Signe	$+$	

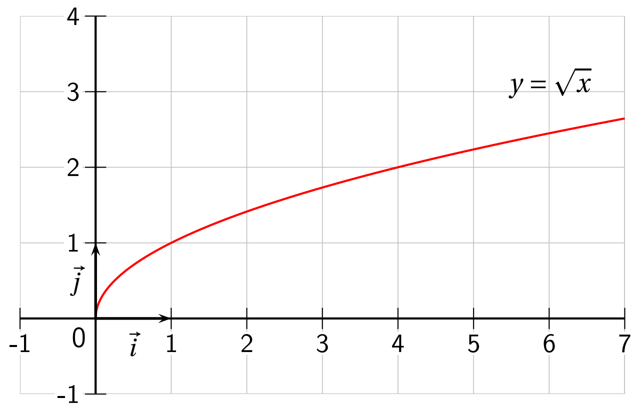
La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve

- Cf Activité.

Remarque : D'après le tableau de variations, la fonction racine carrée admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}^+$, atteint en 0.

Représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:



Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x+4}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

II.2. Croissance comparée

Travail de l'élève :

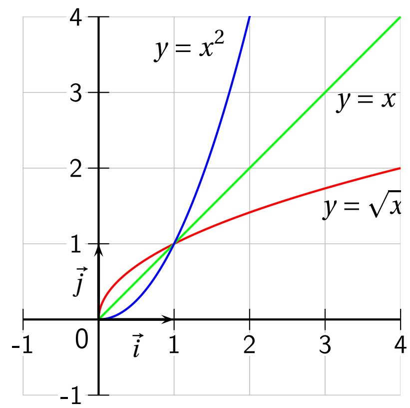
1. Ecrire un algorithme qui lit un nombre x positif et qui affiche alors dans l'ordre croissant x^2 et x.
2. Même question pour x et $\sqrt{x}$.
3. Conjecturer en fonction de x, l'ordre des nombres x^2, x et $\sqrt{x}$.
4. Etudier en fonction de x le signe de x^2-x.
5. Même question pour $x-\sqrt{x}$.
6. Conclure sur la validité de votre conjecture.
7. En déduire la position relative des courbes représentatives des fonctions f, g et h définies par $f(x)=x^2$, $g(x)=x$ et $h(x)=\sqrt{x}$.

Propriété 5.

Si $x=0$ ou $x=1$ alors $x^2=x=\sqrt{x}$.
Si $0<x<1$ alors $x^2<x<\sqrt{x}$.
Si $x>1$ alors $x^2>x>\sqrt{x}$.

Propriété 6.

On appelle respectivement $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes représentatives des fonctions $f : x \longmapsto x^2$, $g : x \longmapsto x$ et $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$.
Les points de coordonnées $(0;0)$ et $(1;1)$ sont communs aux trois courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.
Sur l'intervalle $]0;1[$: la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$, elle-même en dessous de la courbe $\mathscr{C}_h$.
Sur l'intervalle $]1;+\infty[$: la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$, elle-même au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_h$.



Exemples :

Ranger dans l'ordre les nombres suivants :

1. π, π^2 et $\sqrt{\pi}$
2. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi^2}{16}$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 7. Donner le signe de la fonction Φ définie sur $[0;+\infty[$ par $\Phi(x) = \sqrt{x} - x^2$

II.3. La fonction « valeur absolue »

Définition 6.

La distance entre deux réels x et y est la distance, sur une droite graduée, entre les points d'abscissses x et y. On la note $d(x;y)$.

Exemples :

$d(5;3)=2$, $d(-4;-1)=3$ et $d(3;-2)=5$.

Définition 7.

On appelle fonction valeur absolue la fonction qui à tout réel x associe sa distance à 0. On note $f(x)=|x|$.

Exemples :

$|5|=5$, $|-2|=2$, $|0|=0$,
$|3-\pi|=-(3-\pi)=\pi-3$ car $3-\pi<0$,
$|2-\sqrt{2}|=2-\sqrt{2}$ car $2-\sqrt{2}>0$.

Remarques :

⇝ La fonction valeur absolue peut se définir explicitement ainsi :

$$|x|=\begin{cases} x & \text{Si } x\geq 0 \\ -x & \text{Si } x\leq 0 \end{cases}$$

⇝ La valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

⇝ Pour tous réels x et y on a $d(x;y)=|x-y|$.

Exercice 8. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|2x+3|$.

1. Ecrire pour tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction f sans valeur absolue.
2. Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé.

Propriété 7.

- La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$.
- Sa courbe représentative est formé par deux demi-droites. Elle est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- On a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations	↘	0	↗
Signe		$+$	

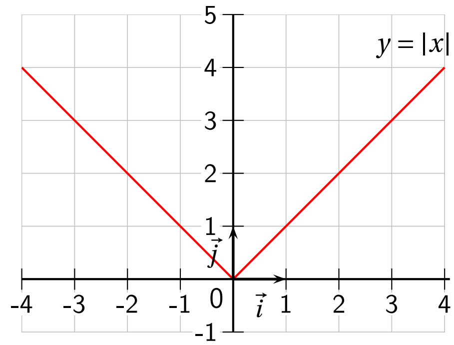
La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty : 0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

Preuve

Sur $\mathbb{R}^-$, on a $f(x) = |x| = -x$ est une fonction affine, par conséquent f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.
Sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(x) = |x| = x$ est une fonction affine, par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque : D'après le tableau de variations, la fonction valeur absolue admet pour minimum 0 sur $\mathbb{R}$, atteint en 0.

Représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$:



Propriété 8.

Soient x et y deux réels.

1. $|-x| = |x|$
2. $|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $|xy| = |x| \times |y|$
5. Si $y \neq 0$ on a $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
6. Par contre : $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Preuve

Revenir à la définition avec la distance à 0 et les abscisses de points. Penser à distinguer les cas que $x = 0$.

Propriété 9.

Soient x un réel et k un réel positif.

1. $|x| = k \iff x = k$ ou $x = -k$
2. $|x| \leq k \iff -k \leq x \leq k$
3. $|x| > k \iff x > k$ ou $x < k$

Exercice 9.

1. Résoudre analytiquement les équations suivantes :

$|x-7| = 3$ $\qquad |y+4| = 6$ $\qquad |2x-7| = 8$ $\qquad |x-1| = -4$

2. Résoudre analytiquement les inéquations suivantes :

$|x-7| \leq 3$ $\qquad |y+4| < 6$ $\qquad |2x-7| > 8$

Propriété 10.

Soient a et x deux réels, et k un réel positif ou nul. Les assertions suivantes sont équivalents :

1. $|x-a| = k$
2. $d(x;a) = k$
3. $a-k \leq x \leq a+k$
4. $x \in [a-k; a+k]$

Exemples :

Dresser le tableau de variations des fonctions suivantes $f_1 : x \mapsto |1+2x|$ et $f_2 : x \mapsto |2x+3| + |x|$ définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |3x| - |2x-2| + 2 - x$

1. Etudier les variations de f
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

III. Variations et opérations sur les fonctions

III.1. Opérations sur les fonctions

Travail de l'élève : On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0.5x^2 - 3x + 2.5$. Avec la calculatrice, on souhaite comparer les variations de u avec certaines fonctions associées à u. On pose k un réel.

1. **Fonction u :**
   (a) Tracer sur votre calculatrice la courbe représentative de la fonction u.
   (b) Etablir le tableau de variations de la fonction u.
2. **Fonction $u+k$:**
   Soit v_k la fonction définie par $v_k(x) = u(x) + k$.
   (a) Comparer l'ensemble de définition de v_4 et celui de u.
   (b) Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction v_4 et celle de u.
   (c) Comment peut-on obtenir la courbe de v_4 à partir de celle de u ?
   (d) En déduire le tableau de variations de la fonction v_4.
   (e) Reprendre les questions $2.a$ à $2.d$ avec d'autres valeurs de k.
   (f) Conjecturer les relations entre l'ensemble de définition d'une fonction f et celui d'une fonction g de la forme $f+k$, ainsi que les relations entre leurs variations.
3. **Fonction ku :**
   On suppose que $k \neq 0$. On appelle w_k la fonction définie par $w_k(x) = ku(x)$.
   (a) Comparer l'ensemble de définition des fonctions w_2, $w_{0.5}$, w_{-1} et w_{-3} avec celui de u.
   (b) Tracer à la calculatrice les courbes représentatives de ces fonctions et celle de u.
   (c) Comparer les variations de ces fonctions avec celles de u.
   (d) Conjecturer le tableau de variations de la fonction w_k en distinguant deux cas.
   (e) Conjecturer les relations entre l'ensemble de définition d'une fonction f et celui d'une fonction g de la forme kf, ainsi que les relations entre leurs variations.

Dans tout ce paragraphe, u désigne une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ et k une constante.

Définition 8.

⇝ La fonction $u+k$ est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}$ associe le réel $u(x)+k$
⇝ La fonction ku est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}$ associe le réel $ku(x)$

Propriété 11.

Soit I un intervalle de $\mathscr{D}$ sur lequel u est monotone.
⇝ Les fonctions u et $u+k$ ont le même sens de variation sur I.
⇝ Si $k>0$, les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur I, sinon des sens contraires.

Preuve

⇝ Si u est croissante sur I : on pose deux réels a et b de I tels que $a<b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)<u(b) \quad \text{car } u \text{ conserve l'ordre sur I} \\ &\iff u(a)+k<u(b)+k \end{aligned}$$

Donc la fonction $u+k$ est croissante sur I.
De même, si u est décroissante sur I, on pose a et b sont deux réels de I tels que $a<b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)>u(b) \quad \text{car } u \text{ inverse l'ordre sur I} \\ &\iff u(a)+k>u(b)+k \end{aligned}$$

Donc la fonction $u+k$ est décroissante sur I.
D'où, u et $u+k$ ont le même sens de variation sur I (et donc, les mêmes variations sur $\mathscr{D}$).

⇝ Si u est croissante sur I : on pose deux réels a et b de I tels que $a<b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)<u(b) \quad \text{car } u \text{ conserve l'ordre sur I} \\ &\iff ku(a)<ku(b) \quad \text{si } k>0 \quad \text{ou} \quad ku(a)>ku(b) \quad \text{si } k<0. \end{aligned}$$

Donc la fonction ku est croissante sur I si $k>0$, décroissante sinon.
De même, si u est décroissante sur I, on pose a et b sont deux réels de I tels que $a<b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\iff u(a)>u(b) \quad \text{car } u \text{ inverse l'ordre sur I} \\ &\iff ku(a)>ku(b) \quad \text{si } k>0 \quad \text{ou} \quad ku(a)<ku(b) \quad \text{si } k<0. \end{aligned}$$

Donc la fonction ku est décroissante sur I si $k>0$, croissante sinon.
D'où, les fonctions u et ku ont le même sens de variation sur I si $k>0$, sinon des sens contraires (ce qui donc se généralise sur $\mathscr{D}$).

Exemples :

Etablir le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

⇝ $f : x \longmapsto 3-\sqrt{x}$
⇝ $g : x \longmapsto 10-0.5x^2$
⇝ $h : x \longmapsto 2|x|-6$
⇝ $k : x \longmapsto 6-2|x|$

Remarque : Sur le même principe de démonstration, on peut constater que :
⇝ une somme de fonctions croissantes sur un intervalle I est une fonction croissante sur I,
⇝ une somme de fonctions décroissante sur I est une fonction décroissante sur I.
⇝ par contre, on n'a pas de règle pour une somme de fonction de sens de variation différents sur I.
⇝ Qu'en est-il du produit ?

III.2. Composée de fonction

Travail de l'élève : On considère la fonction u de l'activité précédente (définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=0.5x^2-3x+2.5$). On appelle v la fonction définie par $v(x)=\sqrt{u(x)}$ et w la fonction définie par $w(x)=\dfrac{1}{u(x)}$.

1. Donner les ensembles de définition de v et w.
2. Tracer sur votre calculatrice les courbes représentatives des fonctions u, v et w.

3. Conjecturer le tableau de variations des fonctions v et w.
4. Soit J un intervalle sur lequel une fonction f est positive ou nulle.
   Conjecturer les relations entre les variations de f et celles d'une fonction g de la forme $\sqrt{f}$ sur J.
5. Soit K un intervalle sur lequel une fonction f ne s'annule pas.
   Conjecturer les relations entre les variations de f et celles d'une fonction h de la forme $\frac{1}{f}$ sur K.

Dans ce paragraphe, u désigne une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}_u$ de $\mathbb{R}$, positive ou nulle, et v une fonction définie sur une partie $\mathscr{D}_v$ de $\mathbb{R}$, qui ne s'annule pas.

Définition 9.

- La fonction $\sqrt{u}$ est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}_u$ associe le réel $\sqrt{u(x)}$.
- La fonction $\frac{1}{v}$ est la fonction qui à chaque réel $x \in \mathscr{D}_v$ associe le réel $\frac{1}{v(x)}$

Propriété 12.

- Soit J un intervalle de $\mathscr{D}_u$ sur lequel u est monotone.
  Les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur J.
- Soit K un intervalle de $\mathscr{D}_v$ sur lequel v est monotone et ne change pas de signe.
  Les fonctions v et $\frac{1}{v}$ ont des sens de variation contraires sur K.

Preuve

- Si u est croissante sur J : on pose deux réels a et b de J tels que $a < b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a<b &\Longrightarrow 0 \leq u(a) < u(b) && \text{car } u \text{ conserve l'ordre sur J et est positive ou nulle} \\ &\Longrightarrow 0 \leq \sqrt{u(a)} < \sqrt{u(b)} && \text{car la fonction racine carré conserve l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Donc la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur J.
  De même, si u est décroissante sur J, on pose a et b deux réels de J tels que $a < b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\Longrightarrow u(a) > u(b) \geq 0 && \text{car } u \text{ inverse l'ordre sur J} \\ &\Longrightarrow \sqrt{u(a)} > \sqrt{u(b)} \geq 0 && \text{car la fonction racine carré conserve l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Donc la fonction $\sqrt{u}$ est décroissante sur J.
  D'où, u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur J.

- Si v est croissante et strictement positive sur K : on pose deux réels a et b de K tels que $a < b$. Alors on a :

$$\begin{aligned} a<b &\Longrightarrow 0 < v(a) < v(b) && \text{car } v \text{ conserve l'ordre sur K et est strictement positive} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{v(a)} > \frac{1}{v(b)} > 0 && \text{car la fonction inverse change l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

  Donc la fonction $\frac{1}{v}$ est décroissante sur K.

Preuve (Suite)

De même, si v est décroissante sur K, on pose a et b deux réels de K tels que $a<b$. Alors :

$$\begin{aligned} a<b &\Longrightarrow v(a)>v(b)>0 \quad \text{car } v \text{ inverse l'ordre sur K et est strictement positive} \\ &\Longrightarrow 0<\frac{1}{v(a)}<\frac{1}{v(b)} \quad \text{car la fonction inverse change l'ordre sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Donc la fonction $\frac{1}{v}$ est croissante sur K.

D'où, les fonctions v et $\frac{1}{v}$ ont des sens de variation contraires sur K.

On procède exactement de même si v est strictement négative sur K, car la fonction inverse change aussi l'ordre sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 11. Etablir le tableau de variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

- $\Phi : x \longmapsto \sqrt{3-x}$
- $\Psi : x \longmapsto 2-5\sqrt{1-4x}$
- $\varepsilon : x \longmapsto \dfrac{4}{7-3x}$
- $\theta : x \longmapsto 3-\dfrac{2}{x^2+1}$

Exercice 12. Donner sur $[0;+\infty[$ les variations de f définie par $f(x)=1-\dfrac{3}{\sqrt{x^2+5}}$