Chapitre 8

Dérivation

Hors Sujet

Titre : « Bachar Mar-Khalifé »
Auteur : Who's Gonna Get The Ball From Behind The Wall Of The Garden Today ?
Présentation succinte de l'auteur : Bachar Mar Khalifé fait sa seconde apparition discographique chez InFiné avec "Who's Gonna Get The Ball From Behind The Wall Of The Garden Today ?", un titre à rallonge qui ne risque pas de passer inaperçu. A la différence de son premier disque "Oil Slick", le chant y est bien plus présent, et le piano se fait plus minimaliste, voire hypnotique. Issu d'une famille de musiciens ayant fui le dangereux Liban en 1989 (son père Marcel est un joueur d'oud reconnu tandis que son frère Rami fait partie du trio Aufgang), Bachar cherche ici à se démarquer en insistant – avec une pointe d'électro- sur les modulations de sa voix, les percussions et les idées. Celles-ci restent résolument engagées sur les dix chansons, entre reprise de chants de manifestations ou retranscription de poèmes dénonciateurs. Et n'oublions pas cette étrange reprise de Serge Gainsbourg ("Machin Chose") en duo avec Kid A. . .

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Calculer un taux de variation ;
- ⇝ Retrouver l'équation de la tangente en un point d'une courbe ;
- ⇝ Dérivée une fonction à l'aide des formules ;
- ⇝ Etudier le signe de la dérivée et en déduire le tableau de variation d'une fonction f.

« *Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est seulement parce qu'ils ne réalisent pas combien la vie est compliquée !* »

John Louis von Neumann

Leçon 8

Dérivation

Au fil du temps

En mathématiques, la dérivation élémentaire est le calcul permettant de définir une variation de phénomène par unité de temps ou par unité géométrique. La dérivée f' d'une fonction f en un point x_0 ne fait rien d'autre que d'indiquer la valeur de la pente de la fonction en ce point : par exemple, si la pente au point x_0, appelé nombre dérivé de f en x_0 et que l'on note $f'(x_0)$, est positive, alors c'est que la courbe de la fonction est orientée « vers le haut »en ce point (elle est croissante) et la valeur de $f'(x_0)$ indique si cette montée est plutôt douce ou forte. De même, si $f'(x_0)$ est négative, la courbe est « descendante »en ce point, et si $f'(x_0) = 0$, la courbe y connaît un répit horizontal. En bref, la fonction dérivée f' n'a pour rôle que de donner toutes les informations sur les variations de f ...
Pourtant, la découverte des fonctions dérivées ne se fit qu'au XVII^e et a été l'un des moments forts des mathématiques. Ceci a obligé les mathématiciens à raisonner en termes de sommes infinies d'éléments « infiniment petits », pour lesquels il a fallu inventer des règles et des opérations. La dérivation a également été une extraordinaire découverte pour la Physique : la connaissance des variations d'une fonction s'est révélée essentielles à la description des phénomènes naturels car les théories physiques parlent avant tout des variations de la nature.

Il faut dire que, dès les premières décennies du XVII^e, l'étude des « courbes »géométriques, inaugurée par les Grecs anciens, s'est déjà transformée en l'étude de fonctions plus générales. C'est Blaise Pascal qui, le premier, mène des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Grâce aux travaux de Fermat, on sait également qu'une fonction (continue) change son mode de variation en passant par un point où sa tangente a une pente nulle, l'extremum, ce qui renseigne sur la forme géométrique de cette fonction. Mais l'ambition des mathématiciens du XVII^e siècle est bien plus générale : il s'agit pour eux de montrer qu'une fonction contient dans son expression mathématique toutes les informations sur ses tangentes et, inversement, que les informations données par les tangentes à une fonction inconnue doivent permettre de reconstruire celle-ci (ce qui équivaut à reconstruire un trajet en voiture à partir uniquement de ses variations de vitesse et de direction).
Mais cette intuition sur le lien entre la fonction et ses tangentes se heurte à un problème : le nombre de tangentes à une courbe est infini car chaque point à la sienne ! Comme les mathématiciens de l'époque ne savent pas raisonner avec l'infini, il leur parait impossible de calculer la pente exacte d'une tangente au point $(x; f(x))$, d'autant plus qu'au sens géométrique un point n'a pas de tangente !

Cependant, dès la seconde moitié du XVII^e siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connait une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral. La notion de nombre dérivée se retrouve pour la première fois dans leurs écrits, sous le nom « fluxion », et défini comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Entre 1660 et 1675, Leibniz et Newton découvrent, chacun de leur côté et indépendamment, une nouvelle mathématique qui permet de raisonner sur des segments « infiniment petits »d'une fonction f. L'idée essentielle est que si l'on considère des segments de plus en plus proche de sa courbe, alors leur tangente tend à se confondre avec le segment lui-même : du coup, sa pente se déduit directement de l'expression de la fonction f.
Néanmoins la théorie du calcul infinitésimal, tout juste éclose, n'est pas encore pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable.

Au XVIII^e siècle Lagrange utilise la notation $f'(x)$, aujourd'hui tout à fait usuelle, pour désigner le nombre dérivé de f en x, tandis que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : elle n'est pas encore construite formellement !
C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

Dans tout le chapitre, a et b désignent deux nombres réels distincts, h un nombre réel non nul, f est une fonction définie sur un intervalle I contenant a et b, et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.

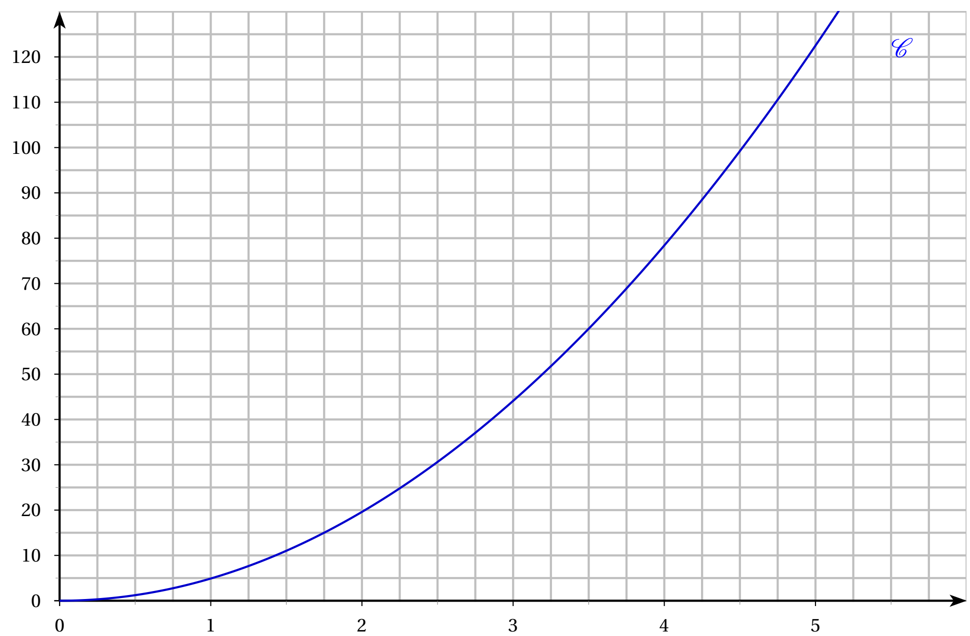
I. Taux de variation et nombre dérivé d'une fonction

I.1. Définition

Exercice 1. En Syldavie, Omar Devone Little [1] , aime lâcher les sacs des élèves studieux, sans vitesse initiale, du haut du quatre-vingt-septième étage des bâtiments du lycée de Gattaca.
L'objectif (car il y en a un) est d'étudier la vitesse des sacs. Par ailleurs, chacun sait que la distance parcourue, en mètres, par un objet en chute libre sans vitesse initiale, est :

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{où } g \text{ est la constante de pesanteur et vaut environ } 9.81 m.s^{-2}$$

Dans géogébra, Omar a tracé la courbe représentative de d :



1. A partir de la courbe représentative de d, comparez les variations de la fonction d sur les intervalles $[0;2]$, $[2;4]$ et $[4;5]$.
2. Proposez une méthode calculatoire pour quantifier les variations de d sur ces intervalles.
3. Généraliser votre formule pour quantifier les variations de d sur un intervalle $[a;b]$, où a et b sont des réels positifs.
4. Interprétez vos calculs en termes de vitesse d'un sac.

1. Omar est un personnage fictif de la série The Wire, sorte de robin des bois modernes qui sévit dans les banlieues de Baltimore. Bien qu'ayant recours à la violence, il respecte un code moral très strict, ne s'en prenant qu'aux puissants trafficants de drogues. Le personnage d'Omar est inspiré de Larry Donnell Andrews.

Définition 1.

On appelle **taux de variation** (ou d'accroissement) d'une fonction f entre deux réels a et b (avec $a \neq b$) la quantité :

$$\tau(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

En notant $b = a+h$ où h est un réel non nul (h représente l'écart entre a et b), le **taux de variation** de f entre a et $a+h$ s'écrit alors :

$$\tau(a,a+h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Remarque : Graphiquement, le taux de variation d'une fonction traduit la « vitesse de (dé)croissance »de sa courbe représentative sur un intervalle. On parle encore de l'allure de la pente d'une courbe.

Application :

Le taux de variation d'une fonction f entre deux réels distincts quelconques est constant si et seulement si f est une fonction affine.

Preuve

Vous avez vu en seconde, voire en troisième, que les fonctions affines sont les fonctions avec un taux de variation constant.

⇝ Démontrons l'implication.
Si f est la fonction affine définie par $f(x) = mx+p$ alors

$$\tau(a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Le taux est constamment égal à m qui désigne le coefficient directeur de la droite représentant la fonction f.

⇝ Démontrons désormais la réciproque.
Si f est une fonction dont le taux de variation est constant alors $\forall a,b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$, on a $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
En particulier, si $b = x \in \mathbb{R}$ varie et a est fixé on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = k \iff f(x) = k(x-a)+f(a) \iff f(x) = kx-ka+f(a)$$

Comme a est fixé, $-ka+f(a) = p$ est une constante et f est bien de la forme $f(x) = mx+p$ où $m = k$.

I.2. Limite du taux de variation et nombre dérivé

Exercice 2. On reprend le contexte de l'activité précédente.

1. Omar cherche désormais à estimer une valeur approchée de la vitesse instantanée d'un sac au bout de 2 s.
   (a) Proposez-lui une méthode, ainsi qu'une estimation.
   (b) Comment pouvez-vous obtenir une meilleure estimation que celle de votre voisin ?
2. Omar affirme : « La vitesse instantanée à l'instant t est $v(t) = 9.81\,t$ m.s^{-1} ».
   (a) Expliquez cette affirmation.
   (b) Interprétez cette affirmation en terme de pente de la courbe représentative de d.
3. **Application** : un sac est lâché sans vitesse initiale du quatre-vingt-septième étage. En considérant que chaque étage fait 3m de haut, calculez, en km/h, la vitesse du sac au moment de l'impact au sol.

Définition 2.

Soit h un réel non nul tel que $a+h \in \mathrm{I}$.
Il arrive que le taux de variation $\tau = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ devienne aussi proche que l'on veut d'un **nombre réel** ℓ, à condition de choisir h suffisamment proche de 0.
On dit alors que la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est ℓ lorsque h tend vers 0 et on note :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

On dit encore que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel ℓ lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, on note $f'(a)$ le nombre ℓ, que l'on appelle **nombre dérivé** de f en a, et on dit que f est **dérivable** en a.

Remarques :

- Ainsi, si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0, on a $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Graphiquement, le nombre $f'(a)$, lorsqu'il existe, mesure la « force »de la pente de la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a.
  - Plus il est élevé, plus la courbe « monte vite »aux alentours du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
  - Si $f'(a)$ est négatif, cela indique que la courbe est décroissante aux alentours de ce point, etc

Exemples :

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5$ et $g(x) = x^2 + 3x - 4$.
- f est-elle dérivable en 2 ?
- g est-elle dérivable pour tout réel a ?
- Comparer les pentes des courbes représentatives de f et g au point d'abscisse 2.

Solutions :

- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^3-5-2^3+5}{h} = \dfrac{12h+6h^2+h^3}{h} = \dfrac{h(12+6h+h^2)}{h} = 12+6h+h^2$

  Comme $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 12$, f est dérivable en 2 et on a $f'(2) = 12$.
- Calculons petit à petit :

$$g(a+h)-g(a) = (a+h)^2+3(a+h)-4-\left(a^2+3a-4\right) = a^2+2ah+h^2+3a+3h-4-a^2-3a+4 = 2ah+3h+h^2$$

  Donc $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = \dfrac{2ah+3h+h^2}{h} = 2a+3+h$ et $\lim\limits_{h\to 0} 2a+3+h = 2a+3 \in \mathbb{R}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

  Par conséquent la fonction g est dérivable pour tout réel a et on a $g'(a) = 2a+3$.
  Par exemple, le nombre dérivé de g en 5 est $g'(5) = 13$.
- En particulier $g'(2) = 7$. La courbe représentative de f « monte donc plus vite »que celle de g aux alentours de leur point d'abscisse 2.

Remarques :

- Il faut toujours modifier l'écriture de τ pour conjecturer la valeur de son éventuelle limite.
- Cauchy, mathématicien français qui passe pour le fondateur de l'analyse moderne, notamment pour la rigueur de ses définitions et de ses démonstrations, définit en 1821 le concept de limite : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée limite de tous les autres ».
  On lui doit également la définition du nombre dérivé d'une fonction en un point telle qu'elle est enseignée.
- Il est possible que le taux de variation ne tende pas vers un réel, mais, par exemple, soit aussi grand que l'on veut, à condition de choisir h assez proche de 0.
  On dira alors qu'il tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0 et on notera :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$$

Dans ce cas, la fonction f n'est pas dérivable en a et le nombre $f'(a)$ n'existe pas.

A la calculatrice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-5$. Voici comment faire pour obtenir $f'(2)$ à la calculatrice :

Modèle	**Affichage dans l'écran de calcul**	**Pour obtenir l'instruction**
Casio	`d/dx(`x^3-5`,2)`	Appuyer sur $\boxed{\text{OPTN}}$ Choisir `CALC` avec $\boxed{\text{F4}}$ Puis `d/dx` avec $\boxed{\text{F2}}$
TI 82 à 84	`nbreDérivé(`$x^3-5,x,2$`)`	Appuyer sur $\boxed{\text{math}}$ Choisir `8:nbreDérivé`
TI 89	$d(x^3-5,x)\mid x=2$ puis $\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)\mid x=2$	Appuyer sur $\boxed{\text{F3 : Calc}}$ Choisir `1:d(  dérivée`
TI Nspire	$\frac{d}{dx}\left(x^3-5\right)\mid x=2$	Dans le $\boxed{\text{Catalogue}}$, Choisir $\boxed{2:\int\sum}$ Puis dérouler le menu `Analyse` Choisir `Dérivée en un point ...` Compléter `Variable :` x et `Valeur : 2`

<u>Exercice</u> 3. **La fonction racine carré**

On considère la fonction racine carré f et h un réel non nul (supérieur à -3 pour les besoins de l'exercice).

1. (a) Ecrire le taux de variation τ de f sur l'intervalle $[3;3+h]$.
   (b) Montrer que $\tau=\dfrac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}$
   (c) En déduire que f est dérivable en 3 et donner la valeur de $f'(3)$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

<u>Exercice</u> 4. On considère la fonction valeur absolue $f(x)=|x|$.

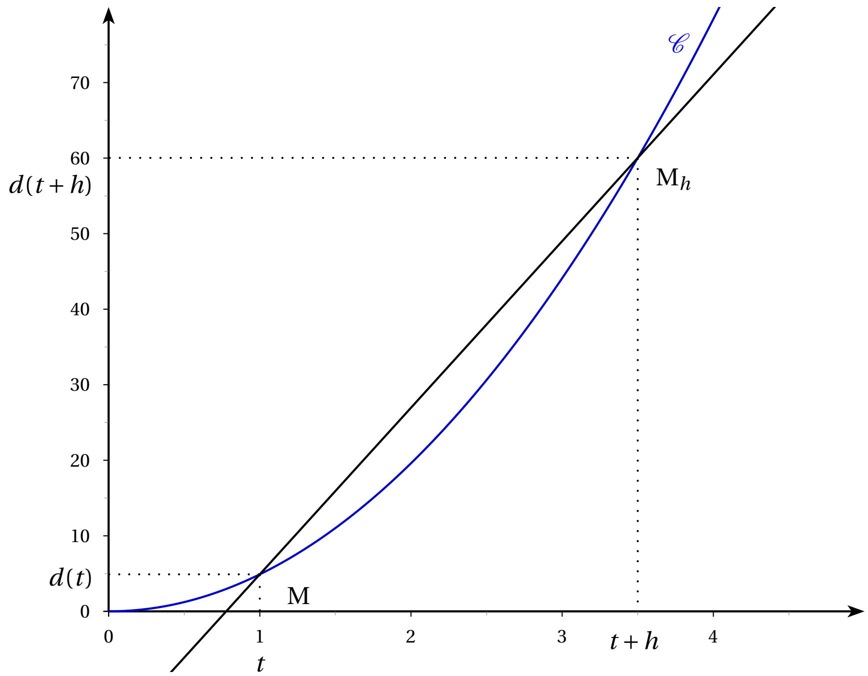
1. On raisonne pour $h>0$; calculer $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$. On parle de limite à droite du taux de variation.
2. On raisonne pour $h<0$; calculer $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$. On parle de limite à gauche du taux de variation.
3. Conclure quant à l'inexistence du nombre dérivé de f en 0.

I.3. Interprétation graphique du nombre dérivé

I.3.a. Un certain coefficient directeur

<u>Exercice</u> 5. On reprend le contexte de l'activité précédente.
Omae, avide de tout savoir, souhaite comprendre l'interprétation graphique du nombre dérivée. Pour cela, il a complété son graphique dans géogébra ainsi :

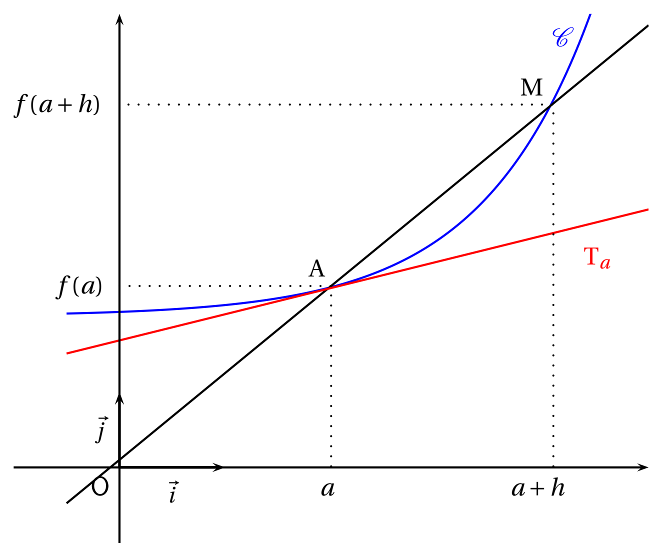
- ⇝ la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction d sur l'intervalle $[0;5]$ (échelle : X :Y = 1 :20).
- ⇝ un point M quelconque sur la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse t,
- ⇝ un curseur h allant de -5 à 5, d'incrémentation 0.01,
- ⇝ le point M_h de la courbe $\mathscr{C}$ et d'abscisse $t+h$,
- ⇝ la droite (MM_h),



1. Déteminer le coefficient directeur de la droite (MM_h) en fonction de t et h.
2. Quel lien peut-on établir avec l'activité précédente ?
3. Faire varier h sur le logiciel puis proposez une interprétation graphique du nombre dérivé à Omar.

Proposition 1.

Soit f une fonction dérivable en a et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a.

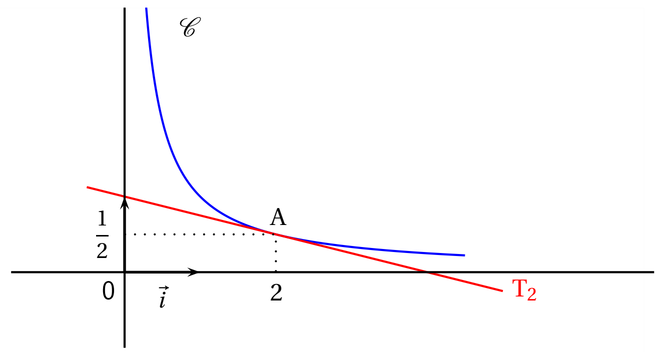


Exemple :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

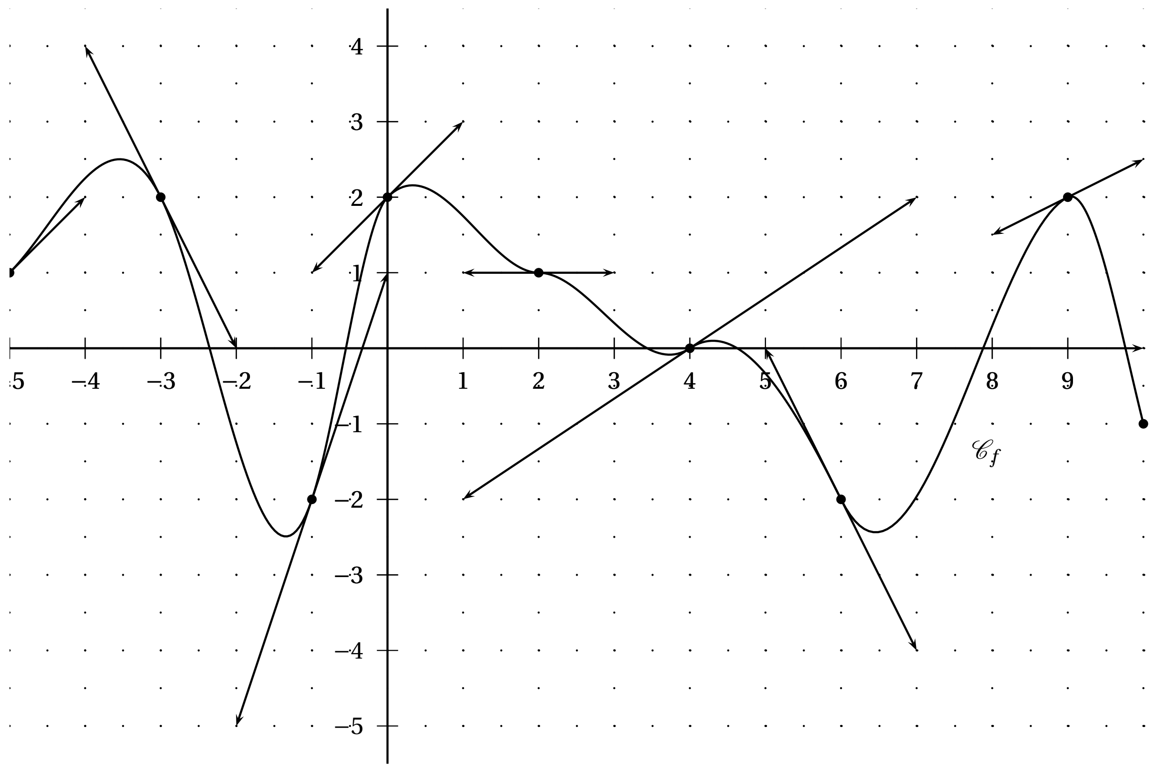
Dans le repère ci-contre, $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f et T_2 la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 2.
Lire sur le graphique le nombre dérivé de f en 2.



Exercice 6. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous.
En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée.
Lisez, en vous servant du quadrillage, les nombres suivants :

$$f(-5) \quad f(-3) \quad f(-1) \quad f(0) \quad f(2) \quad f(4) \quad f(6) \quad f(9)$$

$$f'(-5) \quad f'(-3) \quad f'(-1) \quad f'(0) \quad f'(2) \quad f'(4) \quad f'(6) \quad f'(9)$$



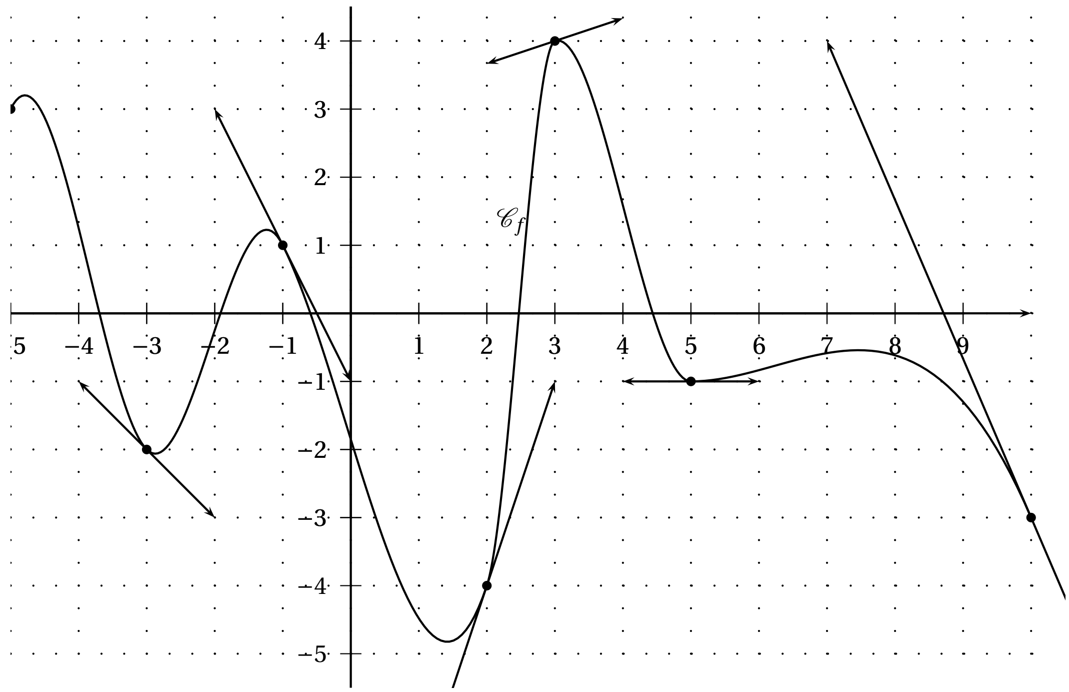
Exercice 7. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f est donnée ci-dessous.
En chacun des points indiqués, $\mathscr{C}_f$ admet une tangente qui est tracée. En vous servant du quadrillage :

1. Lisez les nombres suivants :

$$f(-3) \qquad f(-1) \qquad f(2) \qquad f(3) \qquad f(5) \qquad f(10)$$

$$f'(-3) \qquad f'(-1) \qquad f'(2) \qquad f'(3) \qquad f'(5) \qquad f'(10)$$

2. Retrouvez les équations de chacune des tangentes tracées.



I.3.b. Equation de la tangente

On considère une fonction f dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormée $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}$. D'après la partie précédente, l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ passant par a est de la forme :

$$y = mx + p \qquad \text{avec } m = f'(a)$$

De plus, comme $A(a; f(a))$ est un point de T, les coordonnées de A vérifient l'équation de T :

$$f(a) = f'(a)a + p \Longleftrightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

Au final l'équation de T est $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a \Longleftrightarrow y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Proposition 2.

Une équation de la tangente au point d'abscisse a d'une fonction f dérivable en a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exercice 8. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2$. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{6}{x} - 7$. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives de f et g dans un repère.

1. En utilisant des taux de variation, démontrer que f et g sont dérivables en 1, puis donner $f'(1)$ et $g'(1)$

2. En déduire que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent la même tangente T au point d'abscisse 1. Déterminer une équation de T

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
Donner (en justifiant) l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Exercice 10. Une parabole P admet, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{avec } a \neq 0$$

1. Déterminer les coefficients a, b et c sachant que
   - ⇝ P coupe l'axe des abscisses $(O;\vec{i})$ au point A d'abscisse 3,
   - ⇝ P coupe l'axe des ordonnées $(O;\vec{j})$ au point B d'ordonnée 2,
   - ⇝ P admet en B la droite d'équation $y = x + 2$ pour tangente.
2. Contrôler graphiquement vos résultats.
3. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de P avec $(O;\vec{i})$

Exercice 11.

1. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \sin x$ au point d'abscisse 0
2. Tracer T et $\mathscr{C}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 12. On définit sur $[0;\pi]$ les fonctions f_1 et f_2 par $f_1(x) = \sin x$ et $f_2(x) = \cos x$
Démontrer que leurs courbes représentatives admettent au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$ des tangentes parallèles.

I.3.c. Approximation Affine

I.3.c.i. But : Il existe des fonctions qui demandent des calculs complexes, et parfois il n'est pas utile de connaitre les valeurs exactes, alors on a recours a d'autres fonctions simples qui approximent efficacement la fonction de départ. L'approximation affine est l'approximation d'une fonction par une fonction affine.

I.3.c.ii. Lien avec les dérivées :

Théorème 1.

Considérons une fonction f dérivable sur un intervalle I contenant a. Si f est dérivable en a, alors :

$$\text{Pour tout } h \text{ tel que } a+h \in \mathrm{I} : f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

Preuve

Si f est une fonction dérivable en a alors la limite du taux d'accroissement taux vers un réel que nous avons noté $f'(a)$ i.e :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Il existe donc un nombre, dépendant de h, notons le $\varphi(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ tel que :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \varphi(h) \iff f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varphi(h)$$

Ainsi :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

Etant donné que pour h tendant vers 0 $h\varphi(h)$ est une quantité qui tend vers 0, cette quantité peut être considéré comme négligeable et donc pour h proche de 0 on aura :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Propriété 1.

Soit f une fonction dérivable en a et définie sur un intervalle contenant a. On dit que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine de $f(a+h)$ pour h proche de 0, on a donc pour h proche de 0 :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Exercice 13. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

1. Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0 et préciser l'erreur
2. Calculer mentalement une valeur approchée de $(1,024)^2$ et un majorant de l'erreur

I.3.c.iii. Solution :

1. Pour tout réel $h \neq 0$, $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = h+2$

   Lorque h tend vers 0, $h+2$ tend vers 2. Par conséquent f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$. Or pour h proche de 0, $f(1+h) \simeq f(1) + hf'(1)$, donc :

   $$f(1+h) \simeq 1+2h$$

   Comme $f(1+h) = 1+2h+h^2$, l'erreur commise est $e(h) = h^2$

2. $1,024 = 1 + 0,024$; on applique l'approximation de (1) avec $h = 0,024$ et on trouve :

$$1,024^2 \simeq 1 + 2 \times 0,024 = 1,048$$

$$e(h) = 0,024^2 < 0,03^2 \leq 0,0009$$

II. Fonction dérivé

II.1. Définition

Définition 3.

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si f est dérivable pour tout $a \in \mathrm{I}$.

Exemple :

Nous avons vu dans un exemple précédent, que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 4$ est dérivable pour tout réel a et que son nombre dérivé en a est $f'(a) = 2a + 3$.
On dit donc que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Il est donc naturel de définir une nouvelle fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$. Cette fonction s'appelle la dérivée de f et se note f'.
La dérivée de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 3x - 4$ est donc $f' : x \longmapsto 2x + 3$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.

Soit f une fonction dérivable sur I. On appelle fonction dérivée, que l'on note f', la fonction qui à $x \in \mathrm{I}$ associe $f'(x)$.

II.2. Dérivées des fonctions de référence

Exercice 14. Calculer (s'il existe) le nombre dérivé $f'(a)$ d'une fonction constante $f(x) = k$, d'une fonction affine $g(x) = mx + p$, de la fonction « carré » $h(x) = x^2$, et enfin de la fonction « racine carrée » $s(x) = \sqrt{x}$.
En déduire les fonctions dérivées de chacune, en précisant leur ensemble de définition.

TABLE 1 – Tableau des dérivées des fonctions de références

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (nombre fixé)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2 (fonction carrée)	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3 (fonction cube)	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}$ (fonction puissance)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (fonction puissance négative)	$-nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}*$
$\frac{1}{x}$ (fonction inverse)	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\sqrt{x}$ (fonction racine)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\sin(x)$ (fonction sinus)	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$ (fonction cosinus)	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Preuve

A titre d'exemple, démontrons le pour le cas de la fonction inverse :
Pour tous réels $a \neq 0$ et $h \neq 0$ avec $a + h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

ce qui tend vers $-\frac{1}{a^2}$ lorsque h tend vers 0

II.3. Opération sur les dérivées

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel. Remarquons que les fonctions ci-dessous sont dérivables sur I.

Fonctions	Dérivées	Exemples
ku	ku'	Si $f(x)=5x^3$ alors $f'(x)=15x^2$
$u+v$	$u'+v'$	Si $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ alors $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$
$u\times v$	$u'v+uv'$	Si $f(x)=x\sqrt{x}$ alors $f'(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$
u^n, $n\in\mathbb{Z}$	$nu^{n-1}\times u'$	Si $f(x)=(7x+3)^7$ alors $f'(x)=49(7x+3)^6$
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	Si $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ alors $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	Si $f(x)=\dfrac{3x+2}{4-2x}$ alors $f'(x)=\dfrac{3(4-2x)-(3x+2)\times(-2)}{(4-2x)^2}=\dfrac{16}{(4-2x)^2}$

Exercice 15. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x^3-2x^2+1$
2. $g(x)=\dfrac{5x^2-x}{2}$
3. $h(x)=\dfrac{2}{x}+x$
4. $i(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$
5. $j(x)=\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)(x+\sqrt{x})$
6. $k(x)=\dfrac{1}{4x+1}$
7. $f(x)=4x^2\sqrt{x}$
8. $f(x)=\sqrt{2-x}$

Preuve

1. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h} = \frac{ku(a+h)-ku(a)}{h} = k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

ce qui tend vers $ku'(a)$ quand $h \longrightarrow 0$

2. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

ce qui tend vers $u'(a)+v'(a)$ quand $h \longrightarrow 0$

3. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)\times v(a+h)-u(a)\times v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)-v(a)u(a+h)+v(a)u(a+h)}{h} = v(a)$$

ce qui tend vers $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$ lorsque $h \longrightarrow 0$

4. Seul le cas $n=2$ est au programme de 1S. En effet sa démonstration dans le cas où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et beaucoup moins facile où on utilise des arguments que nous n'avons pas encore abordés...
Pour $n=2$, donc si $f=u^2=u\times u$, on applique la formule pour la dérivée du produit et on obtient (donc en prenant $v=u$) :

$$f'=u'u+uu'=2uu'$$

Pour $n=3$, donc lorsque $f=u^3=u^2\times u$, on applique le résultat précédent et la formule du produit (en prenant cette fois $v=u^2$) et on obtient :

$$f'=u'u^2+u\times 2uu'=u^2u'+2u^2u'=3u^2u'$$

On procéderait de même pour le cas $n=4$, puis pour le cas $n=5$, ... Cette technique ne permet néanmoins pas de généraliser dans le cas où n est quelconque, c'est pourquoi on utilisera en terminale S un nouveau type de raisonnement (le raisonnement par récurrence), pour généraliser ce type de propriété ! !

5. Pour tous réels a et $a+h$ de l'intervalle I, avec $h \neq 0$ on a :

$$\frac{\frac{1}{v}(a+h)-\frac{1}{v}(a)}{h} = \frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{1}{hv(a+h)}-\frac{1}{hv(a)} = \frac{v(a)-v(a+h)}{h\times v(a+h)v(a)} = -\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\times\frac{1}{v(a+h)v(a)}$$

ce qui tend vers $-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$

6. On déduit $(\frac{u}{v})'$ de la formule précédente et de celle du produit, pour obtenir :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u\times\frac{1}{v}\right)' = u'\times\frac{1}{v}+u\times\left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

III. Dérivé et variation d'une fonction

III.1. Signe de la dérivée et variation

Théorème 2.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

1. f est croissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$
2. f est constante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$
3. f est décroissante sur I si, et seulement si pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$

Preuve

$\Rightarrow$) Soit x un réel de I et h un réel non nul tels que $x+h \in$ I.

1. – Si $h > 0$, alors $x+h \geq x$ et comme f est croissante sur I, $f(x+h) \geq f(x) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) \geq 0$
   – Si $h < 0$, alors $x+h \leq x$ et comme f est croissante sur I, $f(x+h) \leq f(x) \Longleftrightarrow f(x+h) - f(x) \leq 0$
   Dans tous les cas, $f(x+h) - f(x)$ et h sont de mêmes signes, donc :
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$
   f est dérivable en x donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a une limite réeel $f'(x)$ lorsque h tend vers 0
   Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives, on admet ici que sa limite en 0 est aussi positive, i.e que $f'(x) \geq 0$
2. f est constante sur I, donc $f(x+h) = f(x)$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, par conséquent $f'(x) = 0$
3. De façon analogue à la première partie, on démontre cette fois que $f(x+h) - f(x)$ et h sont de signes contraires. Ainsi $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs négatives, on admet ici que sa limite en 0 est aussi négative, i.e que $f'(x) \leq 0$

Preuve (Suite)

Hors Programme

$\Leftarrow$) 1. On suppose ici que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in \mathrm{I}$, montrons que la fonction f est croissante sur I :

Soit $a \in \mathrm{I}$, par définition $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$.

– Si $h > 0$, alors $a+h \geq a$ et on veut montrer que $f(a+h) - f(a) > 0$, pour h suffisament petit. Or :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varphi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

$f'(a)h \geq 0$ et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il existe un nombre H tel que pour $h < \mathrm{H}$, $f'(a)h + h\varphi(h) \geq 0$, ce qui montre que pour $h < \mathrm{H}$, $f(a+h) > f(a)$

– Si $h < 0$, alors alors $a+h \geq a$ et on veut montrer que $f(a+h) - f(a) < 0$, pour h suffisament petit. Or :

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varphi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

$f'(a)h \leq 0$ et comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, il existe un nombre H tel que pour $h < \mathrm{H}$, $f'(a)h + h\varphi(h) \leq 0$, ce qui montre que pour $h < \mathrm{H}$, $f(a+h) < f(a)$

Par conséquent comme ce qu'on vient de faire est vraie pour tout $a \in \mathrm{I}$ la fonction f est croissante sur I. (La démonstration n'est pas au programme de 1S, car on utilise la définition formelle des limites qui n'est pas au programme ...)

Pour les autres cas on procède de même

Exercice 16. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + x + 1$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$
2. Dans un repère, tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f

Exercice 17. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation
2. A l'aide de la calculatrice, vérifier la cohérence avec le tableau de variation

Lycée Jean Durand david.zancanaro@wicky-math.fr.nf

III.2. Extremum local

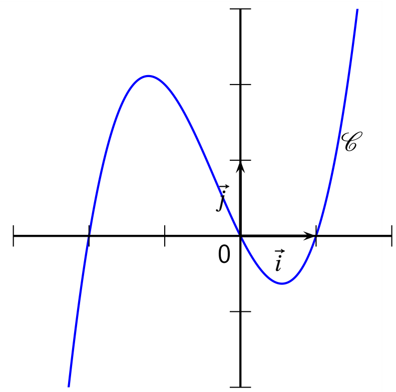
Définition 5.

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et a un réel de I.

1. $f(a)$ est un <u>maximum local</u> (resp. <u>minimum local</u>) de f si et seulement si $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in \mathrm{J}$ où J est un intervalle **ouvert** inclus dans I et contenant a
2. $f(a)$ est un <u>extremum local</u> si et seulement si $f(a)$ est un maximum local ou un minimum local.

Exemple :

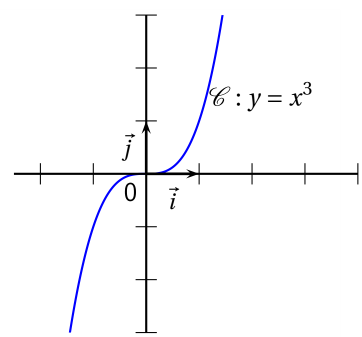
Ci-contre $\mathscr{C}$ la représentation graphique d'une fonction définie sur $[-3;2]$.
On constate que $2,1$ est un extremum local car pour tout $x \in [-2;0]$ on a $f(x) \leq 2,1 = f(-1,2)$
De même, $f(0,6) = -0,6$ est un minimul locar car pour tout $x \in [0;1]$ on a $f(x) \geq -0,6$



Propriété 2.

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et a est un réel de I.
Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$

Remarque : La réciproque de ce théorème est fausse.
Considérons par exemple le cas de la fonction cube, dont la dérivée s'annule en 0 qui n'est pourtant pas un extremum local.
Il faut ajouter une hypothèse pour avoir le résultat réciproque, comme suit :



Propriété 3.

On considère une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f' s'annule en a **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local.

Remarque : Nous admettrons ces deux propriétés.

x		a	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

Exercice 18. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$. Quels sont les extremums locaux de f ?

Exercice 19. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x + 5$

1. Dresser le tableau de variation de f
2. Démontrer que 10 est un majorant de f sur $]-\infty; 0]$
3. Démontrer que pour tout réel $x \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 2\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$, $0 \leq f(x) \leq 10$

« La physique est bien trop dure pour les phycisiens »

David Hilbert, mathématicien