Révisions
ROC

I) Limites de suites

Théorème 1. (Théorème de comparaison)

Soient u et v deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Preuve **ROC**

Soient u et v deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang N. Soit A un réel.

1. Justifier l'existence d'un entier p tel que pour tout entier $n \leq p$, $u_n > \mathrm{A}$
2. Démontrer que l'intervalle $]\mathrm{A};+\infty[$ contient toutes les valeurs de v_n à partir du rang $\max(\mathrm{N}, p)$.
3. Conclure sur le comportement à l'infini de u.

Solution **:**

1. On sait que u diverge vers $+\infty$ donc par définition, pour tout $n \geq p$ on a $u_n > \mathrm{A}$.
2. Par conséquent,
   - Si $\mathrm{N} \leq p$, à partir du rang $n \geq p \geq \mathrm{N}$, on a $u_n > \mathrm{A}$ (car $n \geq p$) et $v_n \geq u_n$ (car $n \geq \mathrm{N}$), donc $v_n > \mathrm{A}$
   - Si $p \leq \mathrm{N}$, à partir du rang $n \geq \mathrm{N} \geq p$, on a aussi $v_n \geq u_n > \mathrm{A}$

   D'où, pour tout $n \geq \max(\mathrm{N}, p)$ on a $v_n > \mathrm{A}$.
3. Ceci étant vrai pour tout réel A, par définition, on a v diverge vers $+\infty$.

Propriété 1.

Si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Preuve **ROC**

1. Démontrer par récurrence l'inégalité :

$$\forall x \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a :} (1+x)^n \geq 1 + nx$$

2. En déduire que pour tout $q > 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Solution **:**

1. p 17 du Déclic ou Exo 10 du chapitre précédent.
2. Si $q > 1$ alors $q = 1 + x$ avec $x > 0$ et on a $q^n = (1+x)^n \geq 1 + nq'$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+nx) = +\infty$ car $x > 0$.
   D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Théorème 2.

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ.
Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (u_n) est majorée par ℓ, ie que pour tout n, $u_n \leq \ell$

***Preuve* ROC**

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$

1. Quelle hypothèse permet d'affirmer que $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} > l$?
2. On désigne par I l'intervalle ouvert $]\ell - 1; u_{n_0}[$
   a. Pourquoi I contient ℓ ?
   b. Quelle hypothèse permet d'affirmer qu'il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes u_n sont dans I ?
3. On pose $N = max(n_0, n_1)$. Expliquer alors pourquoi pour tout $n \geq N$ on obtient une absurdité et conclure.

***Solution* :**

1. On sait que la suite u est croissante, donc $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} > l$
2. a. On a les inégalités suivantes : $\ell - 1 < \ell < u_{n_0}$ d'après ce qui précède.
   (Les inégalités sont strictes et c'est important pour conclure car I *est ouvert)* Donc I contient ℓ.
   b. On sait que la suite u converge vers ℓ, donc par définition de la convergence, il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes u_n sont dans I.
3. On pose $N = max(n_0, n_1)$. Alors pour tout $n \leq N$, on a en particulier :
   – $n \geq n_0$ donc $u_n \geq u_{n_0}$ d'après le 1) autrement dit $u_n \notin I$
   – $n \geq n_1$ donc $u_n \in I$ d'après le 2b)

   Donc pour tout $n \leq N$, on a à la fois $u_n \notin I$ et $u_n \in I$, ce qui est absurde.
   Notre hypothèse de départ est donc fausse.
   On conclut donc que si une suite est croissante et converge vers ℓ, alors la suite est majorée par ℓ.

Théorème 3.

Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

***Preuve* ROC**

Soit $A \in \mathbb{R}$.

1. Quelle hypothèse du théorème permet d'affirmer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$
2. En déduire que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n > A$.
3. Conclure.

***Solution* :**

1. La suite u n'étant pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
2. La suite u étant croissante, pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq u_{n_0} > A$
3. Pour tout $A \in R$, il existe donc un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n > A$.
   Donc par définition, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

II) Fonction exponentielle

Théorème 4.

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1$$

Preuve ROC : Unicité (car l'existence est admise ...)

1. On considère la fonction c définie sur $\mathbb{R}$ par $c(x) = f(x)f(-x)$.
   Montrer que c est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les mêmes propriétés que f, ie $g' = g$ et $g(0) = 1$.
   On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{g}{f}$,
   a. Justifier que h est définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que h est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$
   c. Conclure.

Solution :

1. On dérive $c = uv$ avec $u(x) = f(x)$ et $v(x) = f(-x)$.
   Ainsi $u'(x) = f'(x) = f(x)$ et $v'(x) = -f'(x) = -f(x)$.
   Donc $c'(x) = ... = 0$. c est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $c(0) = f(0)f(-0) = 1$, on conclut que c est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.
2. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$, alors $c(a) = f(a)f(-a) = 0$ ce qui contredit 1).
   Donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. a. f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc h est définie sur $\mathbb{R}$.
   b. On dérive $h = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = g(x)$ et $v(x) = f(x)$.
   Ainsi $u'(x) = g'(x) = g(x)$ et $v'(x) = f'(x) = f(x)$.
   Donc $h'(x) = ... = 0$ est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
   Comme $h(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ on conclut que $h = 1$.
   c. Ainsi $\dfrac{g}{f} = 1 \iff g = f$. Donc f est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$

Théorème 5.

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} = 0$$

Preuve ROC

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $g(x) = e^x - x$.
   En étudiant la fonction g sur $\mathbb{R}^+$, montrer que $e^x \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. Grâce à un changement de variable, en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Solution :

1. $g'(x) = e^x - 1$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $e^x \geq 1$ donc $g'(x) \geq 0$ et g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   Sa valeur minimale est atteinte quand $x = 0$ et vaut $g(0) = e^0 - 1 = 0$. Donc g est positive sur $\mathbb{R}^+$.
   Ainsi, $e^x \geq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. On pose $\mathrm{X} = -x$. Alors
   $$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-\mathrm{X}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{\mathrm{X}}} = 0$$
   d'après ce qui précède.

III) Intégration

Théorème 6. (Fondamental)

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
Alors la fonction F définie sur $[a;b]$ par :

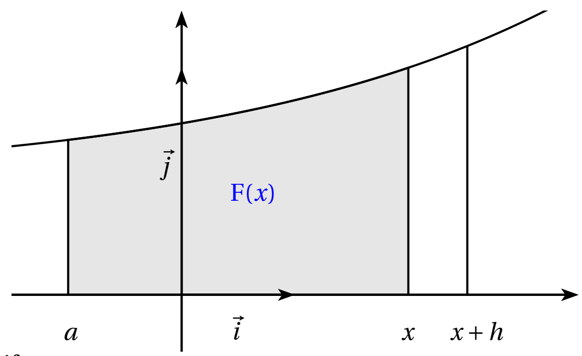
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a;b]$ et pour tout réel $x \in [a;b]$ on a $F'(x) = f(x)$.
Plus précisément, F est **la primitive** de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Preuve ROC : Cas où f est croissante

On considère une fonction f continue, positive et croissante sur l'intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccl} F & : & [a;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$



Soit $x \in [a;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x+h \in [a;b]$. un réel strictement positif.

1. Ecrire le taux d'accroissement $\tau(h)$ de la fonction F entre x et $x+h$.
2. a. On suppose $h > 0$.
   i. Montrer que $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt$.
   ii. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.
   iii. En utilisant deux rectangles bien choisis, montrer que

$$f(x) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x+h)$$

   b. On suppose $h < 0$. Reprendre le raisonnement précédent sur $F(x) - F(x+h)$ puis encadrer $\tau(h)$.
3. Quelle hypothèse sur f nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$?
4. En déduire que $\lim\limits_{h\to 0^+} \tau(h) = \lim\limits_{h\to 0^-} \tau(h) = f(x)$.
5. Que peut-on en déduire pour F ?
6. Que vaut $F(a)$?
7. Conclure.

Solution :

1. $\tau(h)=\dfrac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}$

2. **a.** i. $\mathrm{F}(x+h)=\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt=\mathrm{F}(x)+\int_x^{x+h} f(t)dt$

   Donc $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_x^{x+h} f(x)dx.$

   ii. $\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)$ est l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$.

   iii. Elle est donc comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x)$ et $f(x+h)$ (avec $f(x+h)>f(x)$ car f croissante).
   Ainsi

$$hf(x)\leq \mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)\leq hf(x+h) \iff f(x)\leq \frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}\leq f(x+h) \iff f(x)\leq \tau(h)\leq f(x+h)$$

   b. Si $h<0$, les rectangles ont pour base $-h>0$ et pour hauteur $f(x+h)$ et $f(x)$ (avec $f(x+h)<f(x)$).
   Donc on obtient l'encadrement

$$-hf(x+h)\leq \mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x+h)\leq -hf(x) \overset{\iff}{-h>0} f(x+h)\leq \frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x+h)}{-h}\leq f(x) \iff f(x+h)\tau(h)f(x)$$

3. f est continue sur $[a;b]$ donc en x, d'où $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

4. D'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\tau(h)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x+h)}{h}=f(x)$
   et $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\tau(h)=\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(x+h)}{h}=f(x)$

5. Ainsi, pour tout $x\in[a;b]$, on a $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h}=f(x)$
   Donc F est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[a;b]$. Autrement dit, F est une primitive de f sur $[a;b]$.

6. $\mathrm{F}(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)dt=0$

7. Il n'existe qu'une primitive de f qui s'annule en a, ainsi F est la primitive de f qui s'annule en a.

Corollaire 1. (du théorème fondamental)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve ROC : cas I fermé borné

Prérequis :

- le théorème fondamental pour les fonctions continues et positives sur $[a;b]$
- On admet que dans ce cas, f admet un minimum m sur $[a;b]$.

Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I}=[a;b]$ par $g(x)=f(x)-m$.

1. Justifier que g est continue et positive sur I.
2. En déduire qu'elle admet une primitive G sur $[a;b]$.
3. En déduire une primitive F de f sur $[a;b]$.
4. Conclure.

Solution :

1. f est continue sur I, donc g l'est aussi.
   De plus, pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f(x) \geq m \iff g(x) \geq 0$.
2. D'après le théorème fondamental, g admet donc une primitive G sur I. $\left(\mathrm{G}(x) = \int_a^x g(t)\,dt\right)$
   On a donc $\mathrm{G}'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
3. Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a $f(x) = g(x) + m = \mathrm{G}'(x) + m$ Une primitive F de f sur I est donc définie par $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + mx$.
   En effet, $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}'(x) + m$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.
4. On a trouvé une primitive F de f. Donc f admet des primitives sur I (toutes les fonctions de la forme $\mathrm{F} + c$).

IV) Géométrie

Théorème 7. (du toit)

Cf Livre Déclic p 270, exercice 16 (corrigé et avec de beaux dessins) ou encore exercice 9 de la fiche du chapitre 3.

Théorème 8.

Si une droite Δ est orthogonale à deux droites d_1 et d_2 **sécantes** d'un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.

***Preuve* ROC**

On note $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ des vecteurs directeurs respectivement de d_1 et d_2 et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.
Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$ de vecteur directeur $\vec{w}$.

1. Traduire les hypothèses d'orthogonalité de l'énoncé en termes de produit scalaire.
2. Expliquer pourquoi il existe a et b tel que $\vec{w} = a\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
3. Conclure.

Solution :

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathscr{P}$, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

1. Par hypothèse, on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} = 0 = \vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2}$.
2. d_1 et d_2 sont sécantes. Donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ constitue une base de $\mathscr{P}$. De plus $\mathscr{D} \in \mathscr{P}$.
   Ainsi, il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}$
3. On a donc

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \left(a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}\right) \\ &= a\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + b\vec{u} \cdot \overrightarrow{v_2} \\ &= a \times 0 + b \times 0 = 0\end{aligned}$$

   Autrement dit, $\Delta \perp \mathscr{D}$. Donc Δ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$

Proposition 1.

Soit $\mathscr{P}$ un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Le plan $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et dans tout repère orthonormé de l'espace, le plan $\mathscr{P}$ a une équation cartésienne de la forme

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b et c sont les coordonnées de $\vec{n}$ dans ce repère (et sont donc non tous nuls), et d est un réel.

***Preuve* ROC**

Soit M un point de l'espace.
On appelle H le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M.

1. Etablir que pour tout M, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}$
2. En déduire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff M = H$
3. Quelle conséquence en tire-t-on pour un point M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$?
4. On note $M(x, y, z)$ et $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.
   Montrer que $M \in \mathscr{P} \iff ax + by + cz + d = 0$.

***Solution* :**

1. Il est clair que $(d) \perp \mathscr{P}$, donc (d) est orthogonal à toute droite de $\mathscr{P}$.
   Or A et H appartiennent à $\mathscr{P}$, donc $(AH) \subset \mathscr{P}$ et $(AH) \perp (d)$.
   Comme $H \in (d)$ on peut dire que H est le projeté orthogonal de A sur d.
   De plus, $M \in mathscr(d)$, donc $\overrightarrow{HM}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AM}$ sur $\vec{n}$.
   Comme $\vec{n} \neq \vec{0}$, on a bien l'égalité voulue (caractérisation du produit scalaire).
2. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n} = 0$
   Or $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{n}$. Donc ce produit scalaire vaut 0 si et seulement si $k\overrightarrow{n}^2 = 0 \iff k = 0 \iff \overrightarrow{HM} = 0 \iff M = H$
3. Ainsi $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$
4. $M \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \ldots \iff ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$

V) Probabilités

Théorème 9.

Si A et B sont deux événements indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B

***Preuve* ROC**

1. Démontrer que pour tout événement A et B on a $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$
2. En déduire si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Solution :

1. $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ qui est une union disjointe.
   Donc $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$. Ainsi $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$
2.

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} \cap B\right) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \quad \text{car A et B sont indépendants} \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \\ &= P(B) \times P\left(\overline{A}\right) \quad \text{Donc } \overline{A} \text{ et B sont indépendants.} \end{aligned}$$

Propriété 2.

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$

Preuve **ROC**

On note f la fonction densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer qu'il existe deux réels c et d (en les déterminant) tels que la fonction $G : t \longmapsto (ct + d)e^{-\lambda t}$ soit une primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction $g : t \longmapsto t \times \lambda e^{-\lambda t}$.
2. En déduire pour tout x, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$.
3. Déterminer alors E(T).

Solution :

1. $G = uv$ avec $u(t) = ct + d$ et $v(t) = e^{-\lambda t}$.
   Alors $u'(t) = c$ et $v'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$.
   Ainsi $G'(t) = c \times e^{-\lambda t} + (ct + d)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}(c - \lambda(ct + d))$
   Donc $G'(t) = g(t) \iff c - \lambda(ct + d) = t\lambda \iff \begin{cases} -\lambda c t = \lambda t \\ c - \lambda d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -1 \\ d = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$ D'où $G(t) = \left(-t - \dfrac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$.
2. $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda \times 0} = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$
3. $E(T) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$
   Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} = \lim_{X \to -\infty} \frac{X}{\lambda} e^{X} = 0$ d'après le cours
   (on a posé $X = -\lambda x$ et $X \to -\infty$ car $\lambda > 0$).
   Et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = 0$ car $\lambda > 0$.
   Donc $E(T) = 0 + 0 + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

Propriété 3.

Soit T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tous réels t et h strictement positifs, on a :

$$P_{(T \geq t)}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$$

C. Aupérin
c.auperin@wicky-math.fr.nf

Preuve **Simples calculs**

Pour tous réels positifs t et h on a $P(T \geq t+h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.

On a $P_{(T\geq t)}(T \geq t+h) = \dfrac{P\big((T \geq t) \cap (T \geq t+h)\big)}{P(T \geq t)} = \dfrac{P\big(T \geq t+h\big)}{P(T \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geq h)$

Théorème 10.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

Preuve **ROC**

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = P(-t \leq X \leq t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)dx$ où f est la fonction densité de la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer $g(0)$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t)$.
2. Montrer que pour tout t positif, $g(t) = 2\displaystyle\int_0^t f(x)dx$
3. En déduire $g'(t)$ pour tout $t \geq 0$.
4. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$.
5. Conclure.

Solution **:**

On cherche à applique le TVI à g.

1. $g(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx = 1$ car f est une fonction densité sur $\mathbb{R}$.
2. Comme f est paire, on a pour tout t positif, $g(t) = 2\displaystyle\int_0^t f(x)dx$.
3. De plus, f est continue, donc $2f$, et g est la primitive de $2f$ qui s'annule en 0 (d'après le théorème fondamental).
Autrement dit, $g' = 2f$ sur $\mathbb{R}^+$.
4. f est positive, donc $2f$ aussi. Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
5. g est continue sur $\mathbb{R}^+$, strictement croissante de 0 à 1.
Comme $0 < \alpha < 1 \iff 0 < 1-\alpha < 1$, on peut appliquer le corollaire du TVI :
il existe un uniquement réel $u_\alpha \in]0;1[$ tel que $g(u_\alpha) = 1-\alpha$.

Théorème 11. (Définition)

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et α un réel tel que $0 < \alpha < 1$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$ où

$$I_n = \left[p - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Rappel : Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On note u_α l'unique réel tel que :

$$P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$

***Preuve* ROC**

1. Déterminer la variable centrée réduite Z_n correspondante à X_n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha)$ en fonction de α.
3. Montrer que $Z_n \in [-u_\alpha ; u_\alpha] \iff \dfrac{X_n}{n} \in I_n$
4. Conclure.

***Solution* :**

1. $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
2. On applique le théorème de Moivre-Laplace et la définition de u_α, en notant Z une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a :
$$\lim_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1-\alpha$$
3.
$$\begin{aligned} -u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha &\iff -u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \\ &\iff np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\ &\iff p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{np(1-p)}}{\sqrt{n}} \\ &\iff \frac{X_n}{n} \in I_n \end{aligned}$$
4. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leq Z_n \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

Théorème 12.

Pour une valeur de p fixée, l'**intervalle de confiance** au seuil de 95%, est :

$$J = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Autrement dit, J contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité d'au moins 0.95

Preuve

On sait que pour n suffisamment grand

$$\begin{aligned} & P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \\ \iff & P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \\ \iff & P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - F_n \leq -p \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - F_n\right) \geq 0.95 \\ \iff & P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \geq p \leq -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n\right) \geq 0.95 \\ \iff & P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq F_n \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95 \end{aligned}$$