Révisions
Probabilités (Loi Normale)

I) Pondichéry avril 2013 (6 points)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

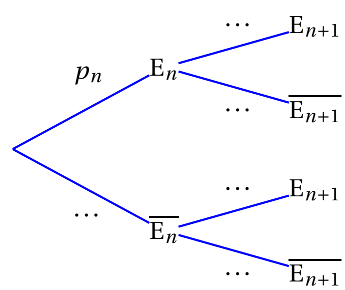
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

   c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

   d. En déduire la limite de la suite (p_n).

   e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $\mathrm{P} < 0,05 - 10^{-\mathrm{K}}$
	P prend la valeur $0,2 \times \mathrm{P} + 0,04$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

   À quoi correspond l'affichage final J ?
   Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'évènement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	$-1,55$	$-1,24$	$-0,93$	$-0,62$	$-0,31$	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$P(Z < x)$	0,061	0,108	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b., une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

II) Liban mai 2013 (5 points)

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.
L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.
On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'évènement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'évènement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

1. On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.
   Dans la suite, on pourra utiliser le tableau ci-dessous.

α	β	$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$
0,13	0,15	0,000 4
0,14	0,16	0,047 8
0,15	0,17	0,499 6
0,16	0,18	0,904 4
0,17	0,19	0,499 6
0,18	0,20	0,047 8
0,19	0,21	0,000 4

   Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.
2. On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.
   On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.
   On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.
   Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16 ; 0,18]$.

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

On pourra utiliser le tableau donné ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire Z suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

β	$P(-\beta \leqslant Z \leqslant \beta)$
2,432 4	0,985
2,457 3	0,986
2,483 8	0,987
2,512 1	0,988
2,542 7	0,989
2,575 8	0,990
2,612 1	0,991
2,652 1	0,992
2,696 8	0,993

III) Amérique du Nord mai 2013 (5 points)

Les parties A. B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commercialisable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \leqslant X \leqslant 410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \leqslant -1,751) \approx 0,040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.
Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

   Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

   Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0,003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?
3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

IV) Exercices type Bac sur la loi Normale

Exercice 1 :

1. Lorsque Lisa appelle de chez elle un taxi de la société « Blue Taxi », le temps d'attente X, en minutes, est distribué selon la loi normale de moyenne 19 minutes et d'écart type 3 minutes.
   a. Quelle est la probabilité que Lisa doive attendre son taxi moins d'un quart d'heure ?
   b. Quel temps d'attente minimal peut-elle accepter si elle veut qu'il soit respecté avec une probabilité au moins égale à 0.9 ?
2. Lorsque Lisa appelle de chez elle la société concurrente « Green Taxi », le temps d'attente Y, en minutes, est également distribué selon une loi normale, d emoyenne μ et d'écart type 7 minutes.
   On admet que la probabilité pour Lisa de devoir attendre un taxi de cette société plus de 8 minutes est égale à 0.97725.
   Quelle est la valeur de μ ?
3. Pour avoir son train, Lisa doit prendre un taxi dans les 10 minutes.
   Etudier à quelle société doit-elle faire appel ?

Exercice 2 : **La sélection chez les vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »**
La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$. La fonction g désigne la fonction densité de cette loi normale.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite dispose de certaines probabilités.
   a. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.
   b. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.
   c. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres de lait par an.
2. Dans son futur troupeau, Loïc souhaite connaître :
   a. La production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.
   b. La production minimale prévisible des 20% des vaches les plus productives.
   Aidez le à déterminer ces valeurs.

Exercice 3 : Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40. La masse des microplaquettes peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $\mu = 12,5$ et de variance $\sigma^2 = 0,2$ et on admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$.

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$)

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h < X < \mu + h) = 0,99$.
   Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité.
   Calculer les poids d'alerte.
   Grâce à des échantillons prélevés en sortie de chaine, ces masses d'alerte permettent de déceler des anomalies en temps réel.

Exercice 4 : La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

V) Exercices type Bac sur l'échantillonnage

Exercice 5 : Prenons un cas très classique : un sondage politique.
Le 18 avril 2002, l'institut IPSOS 13 effectue un sondage dans la population en âge de voter.
On constitue un échantillon de 1000 personnes (inscrites sur les listes électorales) que l'on suppose choisies ici de manière aléatoire. Ce n'est pas le cas en pratique, mais le principe reste le même que dans cet exemple.
Les résultats partiels en sont les suivants : sur les 1000 personnes

– 135 ont déclaré vouloir voter pour Jean-Marie Le Pen
– 195 ont déclaré vouloir voter pour Jacques Chirac
– 170 ont déclaré vouloir voter pour Lionel Jospin.

1. Pour chacun des trois candidats ci-dessus, déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95%.
2. L'institut ne donne qu'une valeur unique en pourcentage à la presse pour chaque candidat. Lesquelles ? Evaluer l'imprécision.
3. Les vrais résultats ont respectivement été : 16,9%, 19.9% et 16.2%. Commenter.
4. L'institut CSA lui donnait 14% pour Jean-Marie Le Pen (dans les mêmes conditions d'échantillonnage). Retrouver l'intervalle de confiance correspondant et commenter par rapport au score réel.

Solution :

1. On peut déterminer trois intervalles de confiance au niveau de confiance de 95% :
   – Jean-Marie Le Pen $[0,135-0,032;0,135+0,032]=[0,103;0,167]$
   – Jacques Chirac $[0,195-0,032;0,195+0,032]=[0,163;0,227]$
   – Lionel Jospin $[0,170-0,032;0,170+0,032]=[0,138;0,202]$.
2. Les valeurs centrales des intervalles en pourcentage, et donc une imprécision de $\pm 3\%$.
3. Ok pour Jacques et Lionel, pas pour Jean-Marie. Voir note de bas de page.
4. $[0.108;0.172]$ donc contient le score réel.

Exercice 6 : Une société qui produit des jus de fruits propose au service commercial deux nouveaux mélanges : OPK (Orange Pamplemousse Kiwi) et OMA (Orange Mangue Ananas). Dans un sondage aléatoire réalisé sur 60 consommateurs, 56% préfère le mélange OPK. On fait l'hypothèse (H) que, dans l'ensemble des consommateurs, 50% préfère le mélange OPK.

1. Peut-on rejeter l'hypothèse (H) au risque de 5% ? *Bien détailler la démarche.*
2. Déterminer toutes les valeurs de p que l'on ne peut pas rejeter ?

Exercice 7 : Une ferme piscicole possède plusieurs bassins dans lesquels grandissent les alevins. Lorsque les poissons ont une masse supérieur ou égal à $650g$, ils sont prêts à être commercialisés.

1. On extrait au hasard un échantillon de 50 poissons. Le nombre de poissons est suffisamment grand pour considérer qu'il s'agit d'un tirage avec remise. On constate que 14 d'entre eux ont une masse inférieur à 650 g et 8 une masse supérieure ou égale à 1 kg. Donner un intervalle de confiance au niveau 95% de la proportion de poissons commercialisables dans ce bassin.
2. On suppose désormais que la variable aléatoire M qui à tout poisson du bassin associe sa masse en grammes suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Déterminer μ et σ en utilisant les données de la questions 1.
3. La ferme expédie les poissons par boîte de 20. On remplit les boîtes en prélevant au hasard 20 poissons dans le bassin et on appelle X la variable aléatoire qui à toute boîte associe le nombre de poissons dont la masse est inférieure à 650 g.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Quelle est la probabilité que la boîte contienne 20 poissons dont la masse est supérieure ou égale à 650 g.
   c. Quelle est en moyenne, par boîte, le nombre de poissons dont la masse est insuffisante pour être commercialisés ?

VI) Autres lois continues (5 points)

Exercice 8 : **QCM : Une ou plusieurs réponses sont possibles. Les déterminer dans chaque cas.**

1. X est une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que $P(1 \leq X \leq 3) = \frac{3}{8}$.
   a. Si X suit une loi uniforme sur $[0; N]$, alors N est égal à :

   8 $\qquad$ $\frac{16}{3}$ $\qquad$ 5.3

   b. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

   $\lambda = \ln(2)$ $\qquad$ λ prend deux valeurs dont la valeur $\ln(2)$ $\qquad$ il n'existe pas de tel λ

2. X est une variable aléatoire qui suit une loi définie par la densité $f : t \longmapsto kt^n$ sur $[1; 10]$. Alors on peut avoir

   $n = 0$ et $k = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $n = 1$ et $k = \frac{2}{99}$ $\qquad$ $n = -2$ et $k = \frac{10}{9}$

Exercice 9 : Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.
   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure 10 ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 10 : Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second. On note :

– D l'évènemenrt « le composant est défectueux » ;
– F_1 l'évènement « le composanrt provient du premier fournisseur » ;
– F_2 l'évènement « le composanrt provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.
   b. Calculer $P(D \cap T_1)$, puis démontrer que $P(D) = 0,0225$.
   c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
   a. Sachant que $P(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
   b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
   c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?