

**CORRECTION DEVOIR D'ENTRAÎNEMENT
LIBAN MAI 2013**

Exercice 1 : Commun à tous les candidats

4 points

Question 1 : Réponse d

Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est le vecteur $\vec{d}(1, 2, 3)$, un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}' est le vecteur $\vec{d}'(1, 1, -1)$. $\vec{d} \cdot \vec{d}' = 1 + 2 - 3 = 0$.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont donc orthogonales.

Aussi par élimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

Question 2 : Réponse c

Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur $\vec{n}(1, 1, -1)$.

Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite \mathcal{D}' .

Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal à la droite \mathcal{D}' .

Question 3 : Réponse c

$$AB = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}, \quad AC = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}, \quad BC = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}$$

Ces trois distances sont égales, il en résulte que le triangle ABC est équilatéral.

Question 4 : Réponse b

Pour déterminer lequel de ces vecteurs est un vecteur normal au plan \mathcal{P}' , il suffit de vérifier si ces vecteurs sont orthogonaux à deux vecteurs de \mathcal{P}' qui sont non colinéaires.

Prenons $\vec{d}'(1, 1, -1)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AD'}$, où A(1, -1, 2) et D' est un point de \mathcal{D}' , par exemple celui de coordonnées (1, 3, 4), soit $\overrightarrow{AD'}(0, 4, 2)$.

On vérifie que \vec{d}' et $\overrightarrow{AD'}$ ne sont pas colinéaires, et on constate que, dans le second cas : $\vec{d}' \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AD'} \cdot \vec{n} = 0$

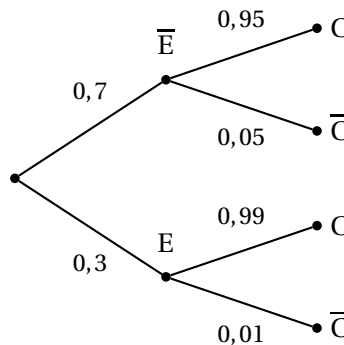
Ce qui signifie que le vecteur $\vec{n}(3, -1, 2)$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P}' .

Exercice 2 : Commun à tous les candidats

5 points

Partie A

1.



2. On cherche $P(C \cap \overline{E}) = P_{\overline{E}}(C) \times P(\overline{E}) = 0,95 \times 0,70 = 0,665$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(C \cap \overline{E}) + P(C \cap E) = 0,665 + 0,99 \times 0,30 = 0,962.$$

4. $P_C(E) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0,99 \times 0,30}{0,962} \approx 0,309$ à 10^{-3} près

Partie B

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,17; 0,006^2)$.

On cherche à calculer la probabilité $P(0,16 \leq X \leq 0,18)$ qui est égale à 0,9044 d'après la table.

a. D'après le cours, comme Y suit une loi normale $\mathcal{N}(m_2; \sigma_2^2)$, alors $Z = \frac{Y - m_2}{\sigma_2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

b.

$$0,16 \leq Y \leq 0,18 \iff \frac{0,16 - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{Y - 0,17}{\sigma_2} \leq \frac{0,18 - 0,17}{\sigma_2} \iff -\frac{0,01}{\sigma_2} \leq Z \leq \frac{0,01}{\sigma_2}$$

Donc lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16; 0,18]$, alors Z appartient à l'intervalle $\left[-\frac{0,01}{\sigma_2}; \frac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

c. On sait que cette probabilité doit être égale à 0,990, le tableau donné permet d'obtenir $\beta = 2,5758$

d'où $\frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \iff \sigma_2 = 0,00385$

En conclusion, à 10^{-3} près, $\sigma \approx 0,004$.

Exercice 3 : Commun à tous les candidats

6 points

Partie A

1. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, il vient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, il vient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 0$

Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à \mathcal{C}_1 au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.

2. $f_1(x) = \frac{e^x \times 1}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{1 + e^x}$

3. $f_1' = -\frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

Cette expression étant toujours strictement positive sur \mathbb{R} , il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur \mathbb{R} .

4.

$$I = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx = [\ln(1 + e^x)]_0^1 = \ln(1 + e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$$

I s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par \mathcal{C}_1 , l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\frac{1 + e}{2}\right)$ qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

Partie B

$P(x; f_1(x))$ et $M(x; f_{-1}(x))$. K est le milieu de $[MP]$.

1. $f_1(x) + f_{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$

2. $y_K = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \frac{1}{2}$

Le point K est donc un point de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3. Il en résulte que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

4. Soit \mathcal{A} l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^1 f_1(x) - \frac{1}{2} dx = 2 \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 dx = 2 \ln\left(\frac{1 + e}{2}\right) - 1 \approx 0,24.$$

Partie C

1. **Vrai** : Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $e^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + e^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + e^{-kx}} < 1$.

2. **Faux** : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3. **Vrai** : Car $k \geq 10 \iff -\frac{1}{2}k \leq -5 \iff e^{-\frac{1}{2}k} \leq e^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle ce qui équivaut à $1 + e^{-\frac{1}{2}k} \leq 1 + e^{-5}$. Finalement :

$$0,99 < 0,9933 \leq \frac{1}{1 + e^{-5}} \leq \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

 **Exercice 4 : Candidats N'AYANT PAS SUIVI l'enseignement de spécialité**

5 points

Partie A

- L'algorithme N° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n .
L'algorithme N° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n .
L'algorithme N° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.
- D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.
- Montrons par récurrence la propriété $P_n : 0 < v_n < 3$ pour tout entier naturel n .
Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
Hérédité : Supposons P_n vraie, montrons alors que P_{n+1} est vraie.
On suppose donc que $0 < v_n < 3$. On a :

$$\begin{aligned} 0 < v_n < 3 &\iff 6 - 0 > 6 - v_n > 6 - 3 \\ &\iff \frac{1}{6} < \frac{1}{6 - v_n} < \frac{1}{3} \quad \text{car la fonction inverse est décroissante sur }]0 ; +\infty[\\ &\iff \frac{9}{6} < \frac{9}{6 - v_n} < \frac{9}{3} \\ &\iff \frac{3}{2} < v_{n+1} < 3 \end{aligned}$$

Donc on a bien montré que $0 < v_n < 3 \implies 1 < v_{n+1} < 3$. Ainsi, P_{n+1} est vraie donc l'hérédité est établie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, $P_n : 0 < v_n < 3$ est vraie pour tout entier naturel n .

- $$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - v_n = \frac{9 - v_n(6 - v_n)}{6 - v_n} = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n}$$

Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel, ainsi $6 - v_n$ est positif, donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(v_n - 3)^2}{6 - v_n} > 0, \text{ ainsi la suite } (v_n) \text{ est croissante.}$$
- Comme la suite est croissante et majorée par 3, elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

Partie B

$$1. w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{1}{\frac{6 - v_n}{3v_n - 9}} - \frac{1}{v_n - 3} = \frac{6 - v_n - 3}{3v_n - 9} = \frac{v_n - 3}{3v_n - 9} = -\frac{1}{3}$$

ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$.

$$2. w_n = w_0 + nr = \frac{1}{1 - 3} - \frac{1}{3}n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n$$

$$\text{Comme } w_n = \frac{1}{v_n - 3}, \text{ on a } v_n = \frac{1}{w_n} + 3 = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n} + 3 = \frac{6}{-3 - 2n} + 3.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{-3 - 2n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

Exercice 5 : Candidats AYANT SUIVI l'enseignement de spécialité

5 points

1. $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 40 - 18 = 22$
 $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 110 - 48 = 62$

2. a. « b prend la valeur $5a - 6c$ »
 b. La suite semble être croissante.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prouvons par récurrence que $C_n = A^n C_0$.

C'est vrai pour $n = 0$, car A^0 est la matrice identité.

Supposons que $C_n = A^n C_0$, alors $C_{n+1} = AC_n = A(A^n C_0) = A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$

En conclusion, pour tout entier naturel n , on a $C_n = A^n C_0$

4. $QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. C'est trivialement vrai pour $n = 1$.
 Supposons que $A^n = PD^nQ$, alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nQ(PDQ) = PD^n(QP)DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q$$

En conclusion, pour tout entier naturel n , non nul on a

$$A^n = PD^nQ.$$

6. Puisque $C_n = A^n C_0$, on obtiendra u_n comme la somme :

$$u_n = 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3^n) = -8 \times 2^n + 8 \times 3^n + 9 \times 2^n - 6 \times 3^n = 2^n + 2 \times 3^n.$$

Les deux suites de terme général 2^n et 3^n ayant pour limite $+\infty$, il en résulte que la suite (u_n) n'a pas de limite finie, mais a une limite infinie (on dit qu'elle diverge vers $+\infty$).

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie
 Représentations graphiques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_{-1} des fonctions f_1 et f_{-1}

