EXERCICES : LOGARITHME ET EXPONENTIELLE SONT AU RESTAURANT ...

Exercice 1 : Réunion septembre 2010 (6 points)

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

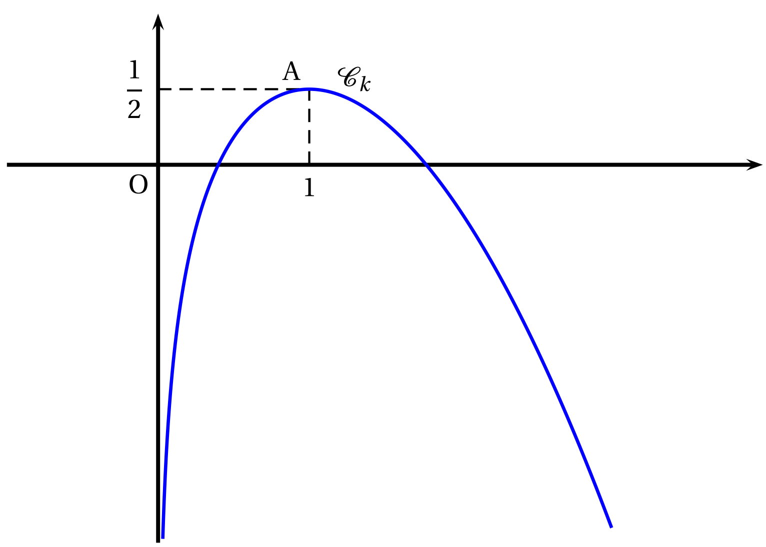
$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.
2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
   Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
   En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.
4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	‖	$\nearrow$	$\frac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

   Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.
5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_k$ représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\,;\,\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_k$.
   Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Exercice 2 : Métropole 2010 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

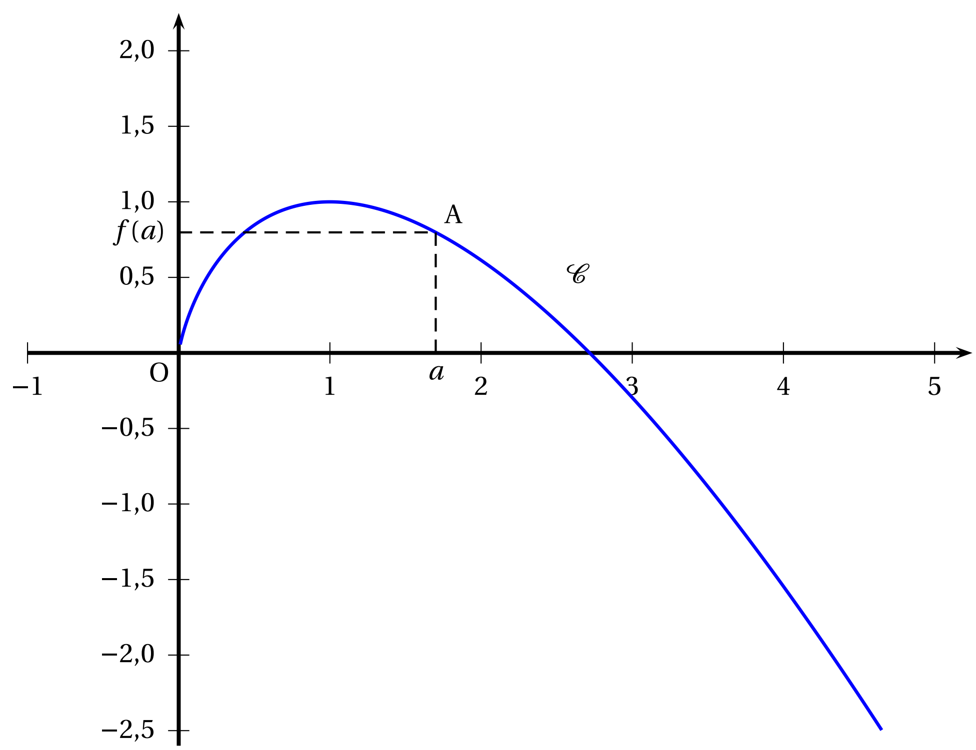
$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

Partie 1 : étude de la fonction f

1. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   - **a.** Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A$'$, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   - **b.** Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



Exercice 3 : Nouvelle-Calédonie 2010 (7 points)

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Etudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   On note f' la fonction dérivée de f.
   a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.
   b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.
   c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 4 : Métropole 2012 (6 points)
Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n. Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$
Sortie :	Afficher u.

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n,

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$u_{n+1}-u_n = f(n)$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Cette question démontre l'inégalité $\ln(k+1)-\ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ (1), avec une méthode que nous verrons dans un chapitre ultérieure. Ainsi, nous admettrons ce résultat pour la suite.

b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par 1, 2, ..., n et démontrer que pour tout entier strictement positif n,

$$\ln(n+1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n \geqslant 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.