EXERCICES : LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Le plan complexe et rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère le point A d'affixe $1+i$. On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$.
Le point M′ est appelé le point image du point M.

1. **a.** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.

   b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M′ est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquelles l'affixe du point M′ est un nombre réel.

Exercice 2 : On considère les points A, B, C, D, S et T d'affixes respectives :

$$a=-2+4i \qquad b=-4+2i \qquad c=4+2i \qquad d=-2+2i+6e^{i\frac{\pi}{2}} \qquad s=5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad t=-2+2i$$

1. Placer ces points et compléter la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Pour chacune des questions suivantes, expliquer la méthode pour y répondre (mais il est inutile d'y répondre)

   a. Montrer que les points A, B C et D sont cocycliques.

   b. Montrer que la droite (ST) est la médiatrice du segment [AB]

   c. On considère les points P et Q, milieux respectifs des segments [AC] et [BD].
   Déterminer p et q les affixes respectives des points P et Q.
3. On a calculé $\dfrac{t-p}{q-s} = -\dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{d-c}{b-a} = 3$ Que peut-on en déduire ?
4. Que représente le point T pour le triangle PQS ? Le démontrer. *On donne $p=1+3i$ et $t=-3-i$.*
5. Déterminer l'affixe r du point R tel que ABSR soit un parallélogramme.

Exercice 3 : Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Le plan complexe est muni d'un repère orthonrmé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Soit A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$. **Proposition :** Le triangle OAB est isocèle.
2. Soit δ l'ensemble des point M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition : Cet ensemble est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3+i\sqrt{3}$. **Proposition :** Pour tout entier naturel non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul. **Proposition :** Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors $|i+z| = 1+|z|$
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition : Si le module de z est égal à 1, alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Exercice 4 : Le plan complexe est muni d'un repère orthonrmé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -i$.
On appelle C le point tel que le triangle ABC soit équilatéral direct, ie tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = +\dfrac{\pi}{3}$.
Déterminer l'affixe du point C.

Exercice 5 : (d'après Amérique du Nord 2012)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On note Ω le point d'affixe 1. On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2$$

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.
2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
   a. Exprimer a sous forme exponentielle.
   b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f.
3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M′ soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle ΩMM′ est rectangle isocèle direct en Ω. On pose $Z = \dfrac{z'-1}{z-1}$
   a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le module de Z pour que ΩMM′ soit isocèle.
   b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'argument de Z pour que ΩMM′ soit rectangle.
   c. En déduire que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.
   d. Montrer que $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$.
   e. En déduire l'ensemble Γ_3.
5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.
   a. Exprimer $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right)$ en fonction d'un argument de z.
   b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M′ soient alignés.

Exercice 6 : (d'après Antilles-Guyane 2012)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1 + 2i \quad ; \quad b = -2 - i \quad ; \quad c = -3 + i.$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Calculer $\dfrac{b}{a}$, en déduire la nature du triangle OAB.
3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M′ d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$$

   a. Calculer l'affixe c' du point C′, image de C par f et placer le point C′ sur la figure.
   b. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.
   c. Justifier que $\mathscr{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathscr{E}$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On appelle J et K les points d'affixes respectives $2 + i$ et $-1 - 3i$.
   On note L le milieu de [JK].
   Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

Exercice 7 : (d'après Asie 2012)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. **On prendra 2 cm comme unité graphique.**
On note r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$.
On considère le point A, d'affixe $z_A = -\sqrt{3}+i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A.
On note enfin B image du point A_1 par r et z_B l'affixe du point B.

1. **a.** Écrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère.
   b. Vérifier que $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire z_B sous forme algébrique.
   Placer alors le point B dans le même repère.
2. On considère le vecteur unitaire $\vec{w}$, tel que $\left(\vec{u}, \vec{w}\right) = \frac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$.
   a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
   b. Tracer la droite Δ, puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
   En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.
3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(O\,; \vec{u}\right)$ et B′ l'image de B_1 par r. Démontrer que $B' = A$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.
   Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D

Exercice 8 : (d'après Liban 2012)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. **Un triangle**
   a. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 3+i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.
   Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
   b. En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+i\sqrt{3}$.
2. **Une transformation du plan**
   On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_0 = 0$, et telle que :

   $$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

   Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a. Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

   $$3+i\sqrt{3}, \quad 2+2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad 2i\sqrt{3}$$

   On remarquera que : $A_1 = 1$, $A_2 = B$ et $A_4 = C$.
   b. Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.
   c. Etablir que pour tout entier naturel n, on a :

   $$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega),$$

   où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1. b)**.

d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{A_n\Omega A_{n+1}}$.

e. Comparer ΩA_n et ΩA_{n+1}.

f. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, màªme incomplète, ou d'initiative, màªme non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer, pour tout entier naturel n, la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$.

Exercice 9 : (d'après Pondichéry 2012)

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M′ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

a. Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et placer les points C et C′ dans le repère donné en annexe.

b. Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

c. Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M′ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

Que peut-on en déduire pour les points A, M et M′ ?

5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D′ par la transformation f.