EXERCICES : DÉPASSER SES LIMITES

Exercice 1 : Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la courbe représentative de la fonction admet une asymptote horizontale :

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{3x^2-2}{x^2+1} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{2-3x}{x^2+x+1} \end{array}$$

Exercice 2 : Soit $f(x) = \dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

1. Démontrer que, si $x > 0$ alors $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
2. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

Exercice 3 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2-\cos x}$

1. Montrer que, pour tout réel x, on a $\dfrac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$
2. En déduire les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2-1 \text{ si } x<0 \\ x-1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 : Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$
3. $f : x \longmapsto \sqrt{3x-1}$ sur $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$
4. $f : x \longmapsto |3x-1|$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6 : Soit (E) l'équation $x^3+5x = 2$

1. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $[0;1]$.
2. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à l'intervalle $[0;1]$? Justifier.

Exercice 7 : Déterminer le nombre de solutions non nulles des équations suivantes et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} : $x+\cos x = 1$ et $x^2 = \sin x$

Exercice 8 : Soit f la fonction définie, pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-1}$

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$, on a $f'(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{(x^3-1)^2}$, où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.
2. Etudier les variations de la fonction P sur $\mathbb{R}$ et démontrer que l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près. En déduire le signe de $\mathrm{P}(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.

Exercice 9 : Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$. Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0;1]$ [1]

1. On considèrera la fonction g où $g(x) = f(x) - x$