EXERCICES
NUL NE DOIT IGNORER LES LOIS CONTINUES

I) Loi uniforme et loi exponentielle

Exercice 1 : Dans un parc national, un guide accompagne chaque soir une groupe pour observer des zébus venant s'abreuver dans un lac auc coucher du soleil.
On suppose que le temps d'attente d'un groupe avant l'arrivée des animaux est compris entre 0 et 2 heures 30 ; on le modélise, en minutes, par une variable aléatoire T de loi uniforme sur $[0;150]$.

1. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(T=20) \qquad P(T<45) \qquad P(45 \le T < 60) \qquad P(T \le 90)$$

2. Le groupe attend en vain depuis 50 minutes. Quelle est la probabilité d'avoit $T \le 60$?

Exercice 2 : Un chêne vit en moyenne 240 ans et on convient de modéliser sa durée de vie, en années, par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle.

1. Quel est son paramètre λ ?

2. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un chêne soit :

a. supérieure à 480 ans

b. inférieure à 120 ans

c. inférieur à 360 ans sachant qu'il a déjà 240 ans ?

Exercice 3 : On considère que la durée de vie, en années, d'un élément radioactif est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On appelle demi-vie de cet élément radioactif, le réel T tel que $P(D \le T) = 0.5$.

1. Démontrer que $T = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$

2. La demi-vie du Césium 137 est de 30 années. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un élément radioactif Césium 137 dépasse 50 ans.

Exercice 4 : **QCM : Une ou plusieurs réponses sont possibles. Les déterminer dans chaque cas.**

1. X est une variable aléatoire qui prend des valeurs positives. On suppose que $P(1 \le X \le 3) = \dfrac{3}{8}$.

a. Si X suit une loi uniforme sur $[0;N]$, alors N est égal à :

$$8 \qquad \frac{16}{3} \qquad 5.3$$

b. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, alors :

$\lambda = \ln(2)$ $\qquad$ λ prend deux valeurs dont la valeur $\ln(2)$ $\qquad$ il n'existe pas de tel λ

2. X est une variable aléatoire qui suit une loi définie par la densité $f : t \longmapsto kt^n$ sur $[1;10]$. Alors on peut avoir

$$n=0 \text{ et } k=\frac{1}{10} \qquad n=1 \text{ et } k=\frac{2}{99} \qquad n=-2 \text{ et } k=\frac{10}{9}$$

Exercice 5 : **Liban 3 juin 2010**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs de boule avec remise en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée.

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »

Exercice 6 : Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$).
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $P(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.
   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 7 : Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

- D l'évènemenrt « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'évènement « le composanrt provient du premier fournisseur » ;
- F_2 l'évènement « le composanrt provient du second fournisseur ».

1. **a.** Dessiner un arbre pondéré.

   b. Calculer $P(D \cap T_1)$, puis démontrer que $P(D) = 0,0225$.

   c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

   a. Sachant que $P(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.

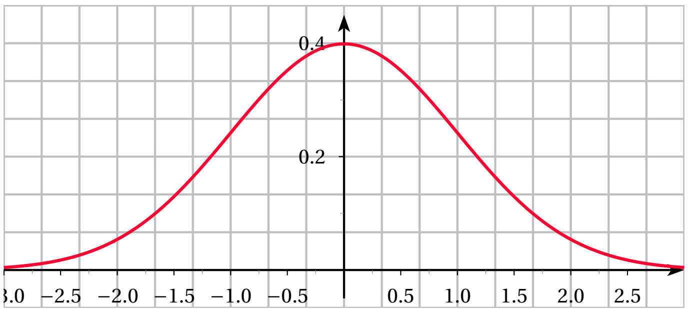
   b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

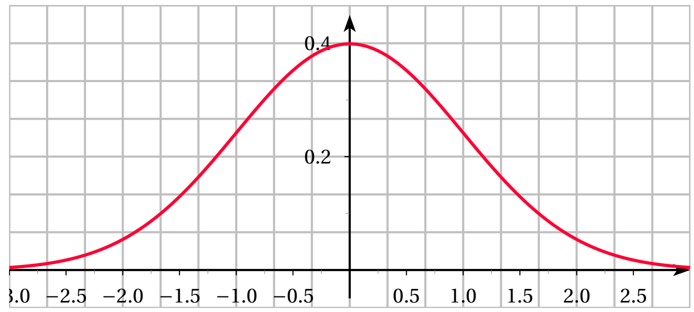
   c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

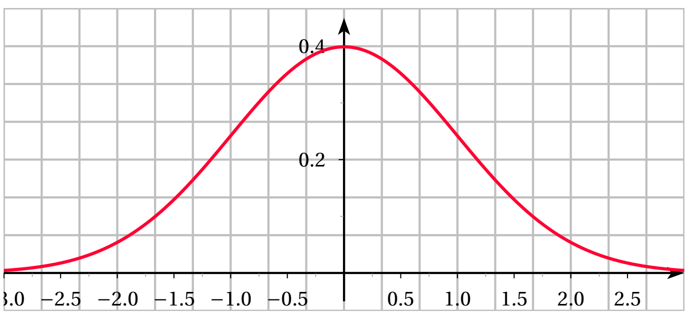
II) Lois Normales

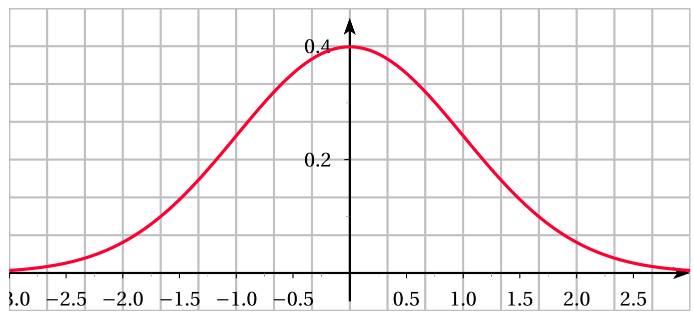
Exercice 8 : On a représenté ci-dessous la fonction f, densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Rappeler l'expression de f.
2. Soit X une variable aléatoire suivant cette loi.
   - **a.** A l'aide du graphique, faire apparaître le domaine ayant pour aire $P(0 < X < 1)$
   - **b.** Donner un encadrement de cette aire en utilisant le quadrillage.
3. Reprendre la question 2 sur les graphiques suivants pour $P(X < 1)$, $P(-1 < X < 1)$, $P(X < -1)$ et $P(X > 1)$.









Exercice 9 : On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite.
Dans cet exercice, on donnera les probabilités arrondies à 10^{-4} près.

1. **a.** A l'aide d'une calculatrice, déterminer la probabilité $P(X < 0.73)$.
   - **b.** A partir de la valeur calculée précédemment, et sans calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

     $P(X > 0.73)$ $\quad$ $P(X \leq -0.73)$ $\quad$ $P(X \leq -0.73)$ $\quad$ $P(-0.73 < X < 0.73)$
2. **a.** Déterminer à l'aide de la calculatrice les probabilités $P(X \leq -0.55)$ et $P(X \leq 0.77)$.
   - **b.** En déduire la probabilité de l'événement $-0.55 \leq X \leq 0.77$.
3. Soit t un réel strictement positif. Exprimer $P(X > -t)$ puis $P(X < -t)$ en fonction de $P(X \leq t)$.

Exercice 10 : Dans une université, à un partiel blanc, les notes sur 20 obtenues par les étudiants ont pour moyenne 9 et pour écart-type 1.5. Un mois plus tard, au partiel, les notes des mêmes étudiants ont pour moyenne 7.5 et pour écart-type 1.
On désigne par X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire associant à un étudiant pris au hasard sa note de partiel blanc (respectivement, sa note de partiel).

1. **a.** Exprimer les variables aléatoires centrées réduites Z_1 et Z_2 associées à X_1 et X_2.
   - **b.** Préciser leurs moyennes et leurs écarts-types.

2. Au vu des diagrammes représentant les deux séries de notes, qui évoquent une courbe en cloche, on fait le choix de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ pour chacune des variables aléatoires Z_1 et Z_2.
   - **a.** Calculer $P(X_1 \leq 10,5)$ et $P(X_2 \leq 9)$. Interpréter.
   - **b.** Un étudiant, Max, a obtenu 10,5 à l'examen blanc et 9 à l'examen.
     Comparativement à ses camarades, Max doit-il considérer avoir progressé ou régressé ?

Exercice 11 : On a observé que la taille T des basketteurs, en cm, suivait approximativement une loi $\mathcal{N}(195;6)$.

1. Déterminer, sans calcul, un intervalle dans lequel la taille d'un basketteur pris au hasard a deux chances sur trois de se trouver.
2. Un recruteur décide de restreindre sa recherche aux basketteurs qui se situent dans le plus petit intervalle I centré en 195 tel que $P(T \in I) \simeq 0.8$.
   - **a.** Déterminer cet intervalle, sachant que $u_{0.2} \simeq 1.28$.
   - **b.** Sachant que le meilleur basketteur français, Tony Parker, mesure 1.86 m, que peut-on penser du choix du recruteur ?

Exercice 12 : Une compagnie de transport souhaite lutter contre la fraude et effectue pour cela des contrôles de tickets de transport.
Valéry utilise ce transport tous les matins. Il a une probabilité $p = 0.08$ d'être contrôlé. Il effectue 600 voyages par an. On appelle C la variable aléatoire qui compte le nombre de contrôles qu'il a subi dans une année.

1. Quelle est la loi suivie par C ?
2. En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, justifier que l'on peut approximer la loi de C par une loi normale $\mathcal{N}(48, 3.5328)$.
3. En déduire la probabilité que Valéry soit contrôlé entre 40 et 50 fois dans l'année.
4. Sachant que le prix du ticket est de 1.20€ et que l'amende est de 20€, quelle est la probabilité que Valéry soit perdant en n'achetant jamais de ticket ?

Exercice 13 : Une étude effectuée par un chercheur a montré que l'âge auquel apparaissent les premiers mots de vocabulaire chez un enfant pris au hasard dans la population peut se modéliser par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 11,5 mois et d'écart-type 3,2 mois.

1. Calculer la probabilité qu'un enfant de cette population ait prononcé ses premiers mots :
   - **a.** entre 8 et 10 mois
   - **b.** avant 7 mois
   - **c.** après avoir fêté ses 18 mois
   - **d.** dans le cours de son 12^e mois
2. Déterminer un intervalle I centré autour de la moyenne qui permette d'affirmer : « la probabilité que l'âge d'apparition des premiers mots appartient à I est 95% ».
3. Déterminer l'âge auquel la probabilité qu'un enfant n'ait encore prononcé aucun mot devient inférieur à 0.25.

Exercice 14 :

1. Lorsque Lisa appelle de chez elle un taxi de la société « Blue Taxi », le temps d'attente X, en minutes, est distribué selon la loi normale de moyenne 19 minutes et d'écart type 3 minutes.
   - **a.** Quelle est la probabilité que Lisa doive attendre son taxi moins d'un quart d'heure ?
   - **b.** Quel temps d'attente minimal peut-elle accepter si elle veut qu'il soit respecté avec une probabilité au moins égale à 0.9 ?

2. Lorsque Lisa appelle de chez elle la société concurrente « Green Taxi », le temps d'attente Y, en minutes, est également distribué selon une loi normale, d emoyenne μ et d'écart type 7 minutes.
   On admet que la probabilité pour Lisa de devoir attendre un taxi de cette société plus de 8 minutes est égale à 0.97725.
   Quelle est la valeur de μ ?
3. Pour avoir son train, Lisa doit prendre un taxi dans les 10 minutes.
   Etudier à quelle société doit-elle faire appel ?

Exercice 15 : **La sélection chez les vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »**
La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X, de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$. La fonction g désigne la fonction densité de cette loi normale.

1. Afin de gérer au plus près son quota laitier (production maximale autorisée), en déterminant la taille optimale de son troupeau, un éleveur faisant naître des vaches de cette race souhaite dispose de certaines probabilités.
   a. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5800 litres par an.
   b. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5900 et 6100 litres de lait par an.
   c. Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6250 litres de lait par an.
2. Dans son futur troupeau, Loïc souhaite connaître :
   a. La production maximale prévisible des 30% de vaches les moins productives du troupeau.
   b. La production minimale prévisible des 20% des vaches les plus productives.

   Aidez le à déterminer ces valeurs.

Exercice 16 : Une coopérative produit du beurre en microplaquettes de 12,5g pour des collectivités et des chaînes hôtelières. Les microplaquettes sont conditionnées dans des boîtes de 40. La masse des microplaquettes peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance $\mu = 12,5$ et de variance $\sigma^2 = 0,2$ et on admet que la variable aléatoire X égale à la masse d'une boîte de 40 microplaquettes suit alors une loi normale d'espérance $\mu = 500$ et de variance $\sigma^2 = 1,6$.

La boîte est jugée conforme si sa masse est comprise entre 496,2 g et 503,8 g (soit environ $500 \pm 3\sigma$)

1. Calculer la probabilité qu'une boîte prélevée aléatoirement en fin de chaîne de conditionnement soit non conforme.
2. Pour contrôler le réglage de la machine, on détermine des poids d'alerte $\mu - h$ et $\mu + h$ tels que $P(\mu - h < X < \mu + h) = 0,99$. Ces poids d'alerte sont inscrits sur une carte de contrôle et correspondent à une marge de sécurité en lien avec des normes de conformité.
   Calculer les poids d'alerte.
   Grâce à des échantillones prélevés en sortie de chaine, ces masses d'alerte permettent de déceler des anomalies en temps réel.

Exercice 17 : La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80% de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

III) En Vrac

Exercice 18 : Antilles Juin 2006 4 points

Partie A : Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $P(X \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

La courbe donnée en annexe 1 représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Partie B : On pose $\lambda = 1{,}5$.

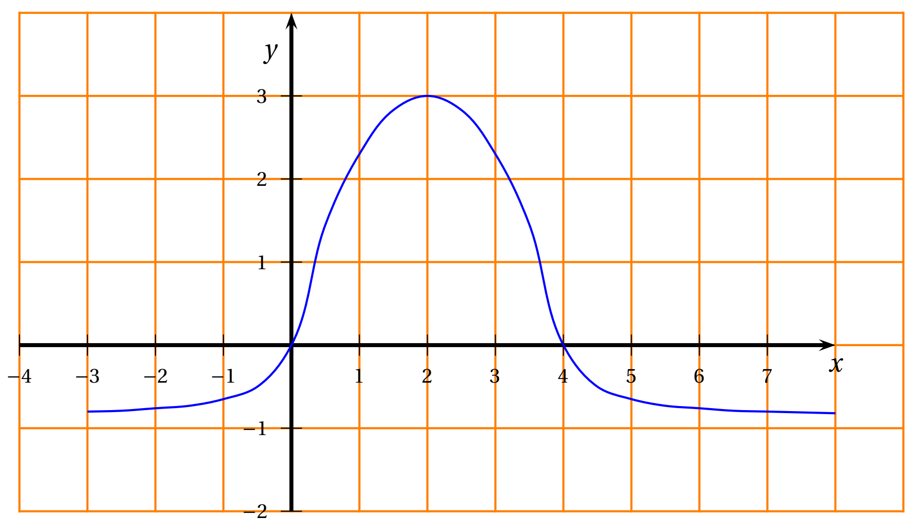
1. Calculer $P(X \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.
2. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.
4. Calculer l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x 1{,}5te^{-1{,}5t}\,dt$.
   Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.
   b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?
2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?



Exercice 19 : Métropole Juin 2008 5 points

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances
   a. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.
   b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,26$.
   a. Calculer $P(X \leqslant 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.
   b. Sachant que l'événement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2\,000)$.
   c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 20 : Antilles Guyane Juin 2010 2 points

Une ou deux des réponses correctes par question, pénalité de 0.25, sans justification.

1. On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

   A : $\frac{1}{3}$ **B :** $\frac{1}{5}$ **C :** $\frac{1}{12}$ **D :** $\frac{1}{4}$

2. On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

   La probabilité pour qu'exactement 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

   A : 0,35 à 10^{-2} prés **B :** $0{,}85^9$ **C :** $0{,}85^9 \times 0{,}15$ **D :** $0{,}85^9 \times 0{,}15 \times 10$

Exercice 21 : Métropole Juin 2010 4 points Une réponse correcte par question, pas de pénalité, sans justification.

1. Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 7 sont blanches et 3 sont noires. On tire simultanément 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 2 boules blanches et 1 boule noire est égale à :
   - $\frac{21}{40}$
   - $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{1}{3}$
   - $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{3}$
2. De la même urne, on tire une boule, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs avec remise. La probabilité d'avoir obtenu 3 boules noires et 2 boules blanches est égale à :
   - $\frac{3^3 \times 7^2}{10^5}$
   - $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \left(\frac{7}{10}\right)^3$
   - $\binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2$

3. De la même urne, on tire une seule boule. Si elle est blanche, on lance un dé cubique (dont les faces sont numérotées de 1 à 6). Si la boule est noire, on lance un dé tétraédrique (dont les faces sont numérotées de 1 à 4). On suppose les dés bien équilibrés. Le joueur gagne s'il obtient le numéro 1.

   Sachant que le joueur a gagné, la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche est égale à :

   - $\frac{7}{60}$
   - $\frac{14}{23}$
   - $\dfrac{\frac{7}{10}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}$

4. On note X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. (λ étant un nombre réel strictement positif). La probabilité de l'événement $[1 \leqslant X \leqslant 3]$ est égale à :

   - $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$
   - $e^{-3\lambda} - e^{-\lambda}$
   - $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-3\lambda}}$

Exercice 22 : Polynésie Septembre 2009 4 points

Vrai ou faux, pénalité de 0.5, sans justification

1. Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les événements :
   - A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ;
   - B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».
   - **Proposition 1** : La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$
   - **Proposition 2** : La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$
2. Soient A, B et C trois événements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que :
   - A et B sont indépendants ;
   - $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$;
   - $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$

   – **Proposition 3** : $P(B) = \frac{7}{12}$

   – **Proposition 4** : $P\left(\overline{A \cup C}\right) = \frac{2}{5}$.
3. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;\,1[$.
   - **Proposition 5** : Si $P(X = 1) = 8P(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.
   - **Proposition 6** : Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = P(X = 0)$.
4. La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

   On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'événement $(X \leqslant t)$ est donnée par :

   $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$ (avec $\lambda = 0,07$).
   - **Proposition 7** : La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près
   - **Proposition 8** : Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

Exercice 23 : Pondichéry Avril 2010 5 points

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.
   a. Démontrer que : $\text{P}(\text{X} = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
   b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par X.
   c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $\text{E}(\text{X}) = \dfrac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}$.
   d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.
2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.
3. On suppose que $n = 1\,000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1 000 boules rouges.

   Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complétement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

   Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi : pour tout $k \in \mathbb{N},\ p(\text{Z} \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k 0,01\text{e}^{-0,01x}\,\text{d}x.$.

   On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.
   a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $\text{P}(\text{Z} \leqslant 50)$.
   b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'événement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».